[東京大学 2004 年前期 文科 $\boxed{3}$]

関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次式で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

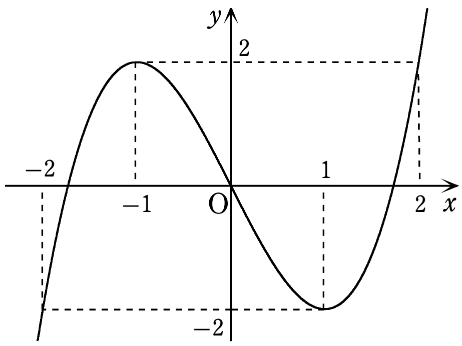
(2) $g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) $h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(1) $f(x)=x^3-3x$ より $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗



よって，$y=f(x)$ のグラフは図のようになるので，

$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数は　$a<-2,\ 2<a$ のとき 1 個

$a=\pm 2$ のとき 2 個

$-2<a<2$ のとき 3 個

(2) $g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x)=0 \iff f(x)\left\{\left(f(x)\right)^2-3\right\}=0$ より $f(x)=0,\ \pm\sqrt{3}$ …①

(1)より①を満たす x の個数はそれぞれ 3 個で，これらはすべて異なる。

よって求める個数は 3×3＝9 個

(3) $h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)=0 \iff g(x)\left\{\left(g(x)\right)^2-3\right\}=0$ より $g(x)=0,\ \pm\sqrt{3}$

$g(x)=0$ を満たす x は(2)より 9 個である。

$g(x)=\sqrt{3}$ のとき，$f(x)=t$ とおくと

$\{f(x)\}^3-3f(x)=\sqrt{3} \iff t^3-3t=\sqrt{3}$

$\iff f(t)=\sqrt{3}$

(1)のグラフより，これを満たす実数tは 3 個あり，小さい方から t_1, t_2, t_3 とすると

(1)のグラフから $-2<t_1<-1<t_2<1<t_3<2$ である。

したがって， $f(x)=t_1, t_2, t_3$ を満たすxの個数はそれぞれ 3 個で，これらはすべて異なるので

全部で 3×3＝9 個ある。

$g(x)=-\sqrt{3}$ についても同様にして 9 個ある。

以上より，求める実数xの個数は 9×3＝27 個。