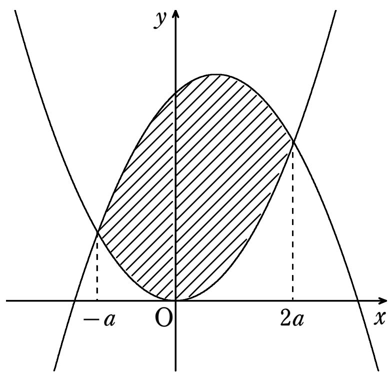
[東京大学 2004 年前期 文科 $\boxed{2}$]

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点$\{x,\ y\}$全体からなる領域を D とする。

$$y \geqq x^2,\ \ y \leqq -2x^2+3ax+6a^2$$

領域 D における $x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

$f(x)=x^2$ …①，$g(x)=-2x^2+3ax+6a^2$ …② とおく。



2 曲線の交点の x 座標は $f(x)=g(x)$ $\Leftrightarrow$ $x^2=-2x^2+3ax+6a^2$

$\Leftrightarrow$ $3x^2-3ax-6a^2=0$

$\Leftrightarrow$ $(x+a)(x-2a)=0$

より $x=-a,\ 2a$

$x+y=k$ とおくと $y=-x+k$ …③ であり，傾き -1 の直線を表す。

まず，③が領域 D と共有点をもつような k の最大値を求める。

②の接線の傾きが -1 となるのは $g'(x)=-4x+3a$ より

$-4x+3a=-1$ から $x=\dfrac{3a+1}{4}$

（ｉ）$\dfrac{3a+1}{4} \leqq 2a$ すなわち $a \geqq \dfrac{1}{5}$ のとき

k は $\left(\dfrac{3a+1}{4},\ -2\left(\dfrac{3a+1}{4}\right)^2+3a\cdot\dfrac{3a+1}{4}+6a^2\right)$ で最大となり，

最大値は $k=\dfrac{3a+1}{4}-2\left(\dfrac{3a+1}{4}\right)^2+3a\cdot\dfrac{3a+1}{4}+6a^2=\dfrac{57}{8}a^2+\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{8}$

（ⅱ）$\dfrac{3a+1}{4}>2a$ すなわち $0<a<\dfrac{1}{5}$ のとき

k は①と②の交点 $(2a,\ 4a^2)$ で最大となり，最大値は $k=2a+4a^2$

次に，③が領域 D と共有点をもつような k の最小値を求める。

①の接線の傾きが -1 となるのは $f'(x)=2x$ より

$2x=-1$ から $x=-\dfrac{1}{2}$

（iii）$-a \leqq -\dfrac{1}{2}$ すなわち $a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

k は接点 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ で最小となり，最小値 $k = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$

（iv）$-a > -\dfrac{1}{2}$ すなわち $0 < a < \dfrac{1}{2}$ のとき

k は①と②の交点 $(-a, a^2)$ で最小となり，最小値 $k = -a + a^2$

(ｉ)～(iv)をまとめると，最大値を M，最小値を m として

$0 < a < \dfrac{1}{5}$ のとき $M = 2a + 4a^2$，$m = -a + a^2$

$\dfrac{1}{5} \leqq a < \dfrac{1}{2}$ のとき $M = \dfrac{57}{8}a^2 + \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{8}$，$m = -a + a^2$

$a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $M = \dfrac{57}{8}a^2 + \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{8}$，$m = -\dfrac{1}{4}$