

[東京大学 2004 年前期 文科 1]

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

$p < q$ とし、 $P(p, p^2), Q(q, q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ であるから

$$\frac{q^2 - p^2}{q - p} = \sqrt{2} \text{ より } p + q = \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $PQ = a$ より $\sqrt{(q - p)^2 + (q^2 - p^2)^2} = a$

$$\Leftrightarrow (q - p)^2 + (q^2 - p^2)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow (q - p)^2 + (q - p)^2(p + q)^2 = a^2$$

これと①より $3(q - p)^2 = a^2$ であるから $q - p = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{2}$

ここで、線分 PQ の中点を M とすると $M\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p^2+q^2}{2}\right)$ であり、

①、②より $q = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{3}}\right), p = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ なので

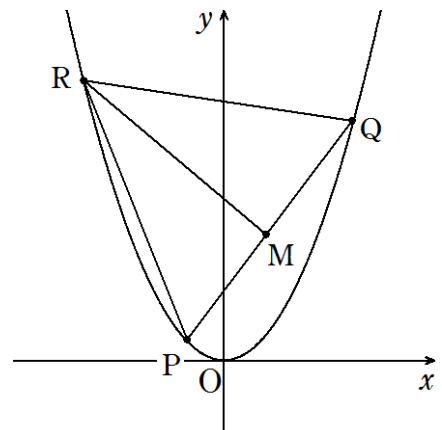
$$p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 2 - 2 \cdot \frac{1}{4}\left(2 - \frac{a^2}{3}\right) = 1 + \frac{a^2}{6} \text{ であるから } M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{a^2}{12}\right)$$

$\triangle PQR$ は 1 辺の長さが a の正三角形であるから $RM \perp PQ, RM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ である。

よって、 $\overline{OR} = \overline{OM} + \overline{MR}$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{a^2}{12}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\overline{MR}}{|\overline{MR}|}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{a^2}{12}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}, 1)$$



$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{1}{2} + \frac{a^2}{12} \pm \frac{a}{2} \right) \quad (\text{複号同順})$$

R は放物線 $y = x^2$ 上にあるので

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2}{12} \pm \frac{a}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 \Leftrightarrow 6 + a^2 \pm 6a = 6 \mp 12a + 6a^2$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 \mp 18a = 0$$

$$a > 0 \text{ より } a = \frac{18}{5}$$