

[ 東京大学 2004 年前期 文科 1 ]



$xy$  平面の放物線  $y = x^2$  上の 3 点  $P, Q, R$  が次の条件を満たしている。

$\triangle PQR$  は一辺の長さ  $a$  の正三角形であり、点  $P, Q$  を通る直線の傾きは  $\sqrt{2}$  である。

このとき、 $a$  の値を求めよ。



[ 東京大学 2004 年前期 文科 2 ]



$a$  を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点  $\{x, y\}$  全体からなる領域を  $D$  とする。

$$y \geq x^2, \quad y \leq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域  $D$  における  $x + y$  の最大値, 最小値を求めよ。



[ 東京大学 2004 年前期 文科 3 ]



関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  を次式で定める。

$$f(x) = x^3 - 3x, g(x) = \{f(x)\}^3 - 3f(x), h(x) = \{g(x)\}^3 - 3g(x)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a$  を実数とする。  $f(x) = a$  を満たす実数  $x$  の個数を求めよ。
- (2)  $g(x) = 0$  を満たす実数  $x$  の個数を求めよ。
- (3)  $h(x) = 0$  を満たす実数  $x$  の個数を求めよ。



[ 東京大学 2004 年前期 文科 4 ]



片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が3枚ある。この3枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り、出た目が1, 2であれば左端の板を裏返し、3, 4であればまん中の板を裏返し、5, 6であれば右端の板を裏返す。たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1回目の操作で出たさいころの目が1であれば、色の並び方は「黒白白」となる。さらに2回目の操作を行って出たさいころの目が5であれば、色の並び方は「黒白白」となる。

(1) 「白白白」から始めて、3回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて、 $n$ 回の操作の後、色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を $p_n$ とする。 $p_{2k+1}$  ( $k$ は自然数)を求めよ。

(注意) さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする。

