[東京大学 2003 年後期 $\boxed{1}$]

(1) $x \geqq 0$ のとき，次の不等式を示せ。

$$x-\frac{x^3}{3!} \leqq \sin x \leqq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

(2) 曲線 $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考える。この立体を x 軸に垂直な $2n-1$ 個の平面によって体積の等しい $2n$ 個の部分に分割する。ただし n は 2 以上の自然数である。

(a) これら $2n-1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち，$\dfrac{\pi}{2}$ より小さくかつ $\dfrac{\pi}{2}$ に最も近いものを a_n とする。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{2}-a_n\right)$ をもとめよ。

(b) $2n-1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち最も小さいものを b_n とする。数列 $\{n^p b_n\}$ が $n \to \infty$ のとき 0 でない有限な値に収束するような実数 p の値を求めよ。また，p をそのようにとったとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^p b_n$ を求めよ。

[東京大学 2003 年後期 $\boxed{2}$]

$p,\ q,\ N,\ M$ を自然数とする。ただし，$\sqrt{p}$ 自然数ではないとする。このとき次の問に答えよ。

(1) 自然数 ℓ に対してある整数 $A,\ B$ があって $\left(\sqrt{p}-\left[\sqrt{p}\right]\right)^{\ell}=A\sqrt{p}+B$ と表せることを示せ。

ただし $\left[\sqrt{p}\right]$ は $\sqrt{p}$ より小さい整数のうちで最大のものを表す。

(2) xy 平面において，x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。このとき，直線 $y=\sqrt{p}x$ との距離が $\dfrac{1}{N}$ 以下で x 座標が N 以上であるような格子点が存在することを示せ。

(3) 双曲線 $y^2-px^2=q$ の上の点 P と格子点 Q で，線分 PQ の長さが $\dfrac{1}{M}$ 以下であるようなものが存在することを示せ。

(4) $p=5,\ q=2,\ M=100$ として(3)の条件を満たすような格子点 Q を一つ求めよ。すなわち，格子点 Q であって，双曲線 $y^2-5x^2=2$ 上の点 P を適当にとれば PQ の長さを $\dfrac{1}{100}$ 以下にすることができるようなものを一つ求めよ。ただし $2.23606<\sqrt{5}<2.23607$ を用いてよい。

[東京大学 2003 年後期 $\boxed{3}$]

(1) すべての n について $a_n \geqq 2$ であるような数列 $\{a_n\}$ が与えられたとして数列 $\{x_n\}$ に関する漸化式

(A)　　$x_{n+2} - a_{n+1}x_{n+1} + x_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

を考える。このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式(A)を満たし， $x_0 = 0$, $x_m = 1$ であるような数列 $\{x_n\}$ がただ一つ存在することを示せ。また，この数列について

$0 < x_n < 1 \quad (n = 1, 2, \cdots, m-1)$ が成り立つことを示せ。ただし m は 3 以上とする。

(2) 数列 $\{a_n\}$ と正の定数 b が与えられ，すべての n について $a_n \geqq 1 + b$ が成り立つと仮定して，数列 $\{y_n\}$ に関する漸化式

(B)　　$y_{n+2} - a_{n+1}y_{n+1} + by_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

を考える。このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式(B)を満たし， $y_0 = 0$, $y_m = 1$ であるような数列 $\{y_n\}$ がただ一つ存在して $0 < y_n < 1 \quad (n = 1, 2, \cdots, m-1)$ が成り立つことを示せ。ただし m は 3 以上とする。

(3) c を 2 より大きな定数として，すべての n について $a_n \geqq c$ が成り立つと仮定する。このとき，c から決まる m によらない正の定数 r で $r < 1$ を満たすものが存在し，(1)で得られた数列 $\{x_n\}$ は $x_n < r^{m-n} \quad (n = 1, 2, \cdots, m-1)$ を満たすことを示せ。