[東京大学 2003 年後期 $\boxed{3}$]

(1) すべての n について $a_n \geqq 2$ であるような数列 $\{a_n\}$ が与えられたとして数列 $\{x_n\}$ に関する漸化式

(A) $\quad x_{n+2} - a_{n+1}x_{n+1} + x_n = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

を考える。このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式(A)を満たし，$x_0 = 0,\ x_m = 1$ であるような数列 $\{x_n\}$ がただ一つ存在することを示せ。また，この数列について

$0 < x_n < 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ が成り立つことを示せ。ただし m は 3 以上とする。

(2) 数列 $\{a_n\}$ と正の定数 b が与えられ，すべての n について $a_n \geqq 1+b$ が成り立つと仮定して，数列 $\{y_n\}$ に関する漸化式

(B) $\quad y_{n+2} - a_{n+1}y_{n+1} + by_n = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

を考える。このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式(B)を満たし，$y_0 = 0,\ y_m = 1$ であるような数列 $\{y_n\}$ がただ一つ存在して $0 < y_n < 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ が成り立つことを示せ。ただし m は 3 以上とする。

(3) c を 2 より大きな定数として，すべての n について $a_n \geqq c$ が成り立つと仮定する。このとき，c から決まる m によらない正の定数 r で $r < 1$ を満たすものが存在し，(1)で得られた数列 $\{x_n\}$ は $x_n < r^{m-n} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ を満たすことを示せ。