



p, q, N, M を自然数とする。ただし, \sqrt{p} 自然数ではないとする。このとき次の問に答えよ。

(1) 自然数 ℓ に対してある整数 A, B があって $(\sqrt{p} - [\sqrt{p}])^\ell = A\sqrt{p} + B$ と表せることを示せ。

ただし $[\sqrt{p}]$ は \sqrt{p} より小さい整数のうちで最大のものを表す。

(2) xy 平面において, x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。このとき, 直線 $y = \sqrt{p}x$ との距離が $\frac{1}{N}$ 以下で x 座標が N 以上であるような格子点が存在することを示せ。

(3) 双曲線 $y^2 - px^2 = q$ の上の点 P と格子点 Q で, 線分 PQ の長さが $\frac{1}{M}$ 以下であるようなものが存在することを示せ。

(4) $p = 5, q = 2, M = 100$ として(3)の条件を満たすような格子点 Q を一つ求めよ。すなわち, 格子点 Q であって, 双曲線 $y^2 - 5x^2 = 2$ 上の点 P を適当にとれば PQ の長さを $\frac{1}{100}$ 以下にすることができるといふようなものを一つ求めよ。ただし $2.23606 < \sqrt{5} < 2.23607$ を用いてよい。

