



(1) $x > 0$ のとき, 次の不等式を示せ。

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

(2) 曲線 $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考える。この立体を x 軸に垂直な $2n-1$ 個の平面によって体積の等しい $2n$ 個の部分に分割する。ただし n は 2 以上の自然数である。

(a) これら $2n-1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち, $\frac{\pi}{2}$ より小さくかつ $\frac{\pi}{2}$ に最も近いものを a_n とする。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{2} - a_n \right)$ を求めよ。

(b) $2n-1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち最も小さいものを b_n とする。数列 $\{n^p b_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 でない有限な値に収束するような実数 p の値を求めよ。また, p をそのようにとったとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p b_n$ を求めよ。

