[東京大学 2003 年前期 理科 $\boxed{1}$]

---

a, b, c を実数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A), (B) を満たすとする。

(A) $f(-1) = -1,\ f(1) = 1$

(B) $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

$g(x) = f(x) - x$ とおくと，(A) より $g(\pm 1) = 0$ である。

因数定理より $g(x) = a(x+1)(x-1)$ と表せる。

よって $f(x) = g(x) + x = ax^2 + x - a$ であり，

$f(x) \leqq 3x^2 - 1 \iff (3-a)x^2 - x + a - 1 \geqq 0$ …①

ここで，$h(x) = (3-a)x^2 - x + a - 1$ とおく。

（ i ）$a = 3$ のとき

$y = h(x) = -x + 2$ であり $h(-1) = 3$，$h(1) = 1$ であるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ において①は成り立つ。

（ ii ）$a > 3$ のとき

$y = h(x)$ は上に凸の放物線で，$h(-1) = 3$，$h(1) = 1$ であるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ において①は成り立つ。

（iii）$a < 3$

$y = h(x)$ は下に凸の放物線で，

$$h(x) = (3-a)\left\{x - \frac{1}{2(3-a)}\right\}^2 - \frac{4a^2 - 16a + 13}{4(3-a)}$$ であるから

放物線の軸は $x = \dfrac{1}{2(3-a)} > 0$ である。

（iii－１）$0<\dfrac{1}{2(3-a)}\leqq 1$　すなわち　$a\leqq\dfrac{5}{2}$　のとき

満たすべき条件は　$-\dfrac{4a^2-16a+13}{4(3-a)}\geqq 0 \iff 4a^2-16a+13\leqq 0$

$$\iff \frac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\frac{4+\sqrt{3}}{2}$$

$a\leqq\dfrac{5}{2}$ であるから　$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}$

（iii－２）$\dfrac{1}{2(3-a)}\geqq 1$　すなわち　$\dfrac{5}{2}\leqq a<3$　のとき

$h(1)=1$ であるから①は成り立つ。

（iii－１），（iii－２）より（iii）のときの a の値の範囲は　$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a<3$

（ｉ），（ii），（iii）より条件(A), (B) を満たす a の値の範囲は　$a\geqq\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$　…②

ここで，　$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2\,dx$

$$=\int_{-1}^{1}(4a^2x^2+4ax+1)\,dx$$

$$=2\left[\frac{4a^2}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=\frac{8}{3}a^2+2$$

であり，　a が②の範囲を変化するとき

I のとりうる値の範囲は　$I\geqq\dfrac{4\left(11-4\sqrt{3}\right)}{3}$　となる。

[東京大学 2003 年前期 理科 $\boxed{2}$]

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1) $\angle\mathrm{APB}$ を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

---

(1) $z=\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=\dfrac{14(t-3)}{(t-7)-ti}$ とおくと

$$\frac{(7+7i)-z}{6-z}=\frac{(7+7i)-\dfrac{14(t-3)}{(t-7)-ti}}{6-\dfrac{14(t-3)}{(t-7)-ti}}=\frac{-7-49i}{-8t-6ti}=\frac{7}{2t}\cdot\frac{1+7i}{4+3i}$$

$$=\frac{7}{2t}\cdot\frac{1+7i}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}=\frac{7}{2t}\cdot\frac{25+25i}{25}=\frac{7}{2t}(1+i)=\frac{7\sqrt{2}}{2t}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$

よって，$(7+7i)-z=\dfrac{7\sqrt{2}}{2t}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\cdot(6-z)$ であるので $\angle\mathrm{APB}=45^\circ$

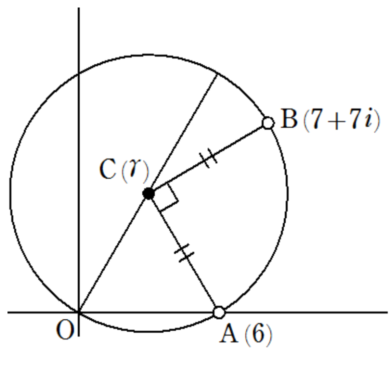
(2) (1)より点 P は 2 定点 A, B を見込む角が 45° となる円周上を動く。

その円の中心を C とし，これを表す複素数を γ とすると

$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$\gamma-6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\{(7+7i)-6\}$$

$$\gamma=6+\frac{1}{2}(1+i)(1+7i)=3+4i$$



よって，OP が最大になるのは図より $z=2(3+4i)$ のときである。

したがって $\dfrac{14(t-3)}{(t-7)-ti}=2(3+4i)$

$$7(t-3)=(3+4i)\{(t-7)-ti\}$$

$$7t-21=3t-21+4ti-28i-3ti+4t$$

$$(t-28)i=0$$

よって $t=28$ （これは $t>0$ を満たす）

[東京大学 2003 年前期 理科 $\boxed{3}$]

xyz 空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に，平面 $z=0$ 上の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径1の円を H，平面 $z=1$ 上の点 $(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

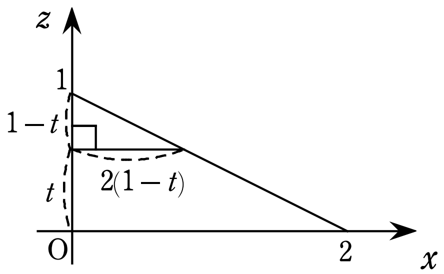
$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\int_0^1 S(t)\,dt$ を求めよ。

---

(1) 円錐 A を平面 $z=t$（$0 \leqq t \leqq 1$）で切ったときの切り口を xy 平面に正射影した図形の方程式は



図と $1-t=\cos\theta$ より　$x^2+y^2=4\cos^2\theta$　…①

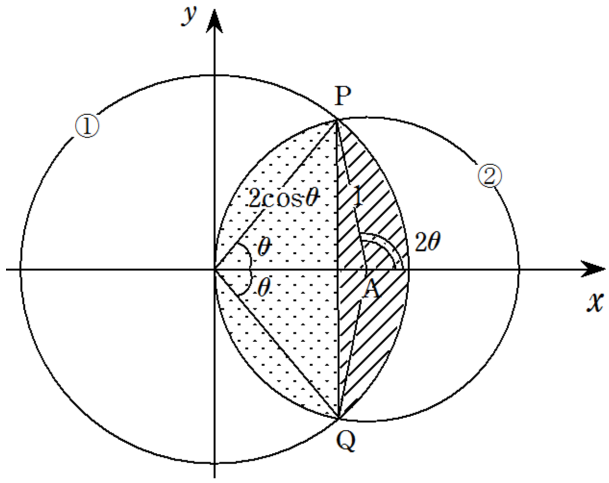
また，円柱 B を平面 $z=t$ で切った切り口を xy 平面に正射影した図形の方程式は

$$(x-1)^2+y^2=1 \quad \cdots②$$

①，②を連立させて x について解くと　$x=2\cos^2\theta$

したがって，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，P，Q を図のように定めると

$\angle \mathrm{POA}=\theta$　であるから



図の斜線部分，打点部分の面積を S_1，S_2 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\sin 2\theta$$

$$=4\theta\cos^2\theta-2\cos^2\theta\sin 2\theta \quad \cdots③$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(2\pi-4\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(2\pi-4\theta)$$

$$=\pi-2\theta+\sin 2\theta\cos 2\theta \quad \cdots④$$

③，④より

$$S(t)=S_1+S_2$$

$$=4\theta\cos^2\theta-2\cos^2\theta\sin 2\theta+\pi-2\theta+\sin 2\theta\cos 2\theta$$

$$=\pi-2\theta+4\theta\cos^2\theta+\sin 2\theta(-2\cos^2\theta+\cos 2\theta)$$

$$=\pi-2\theta+4\theta\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta\left(-2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\cos 2\theta\right)$$

$$=\pi+2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta$$

（③，④は2θが鋭角の場合も同じ式になる）

(2) $t=1-\cos\theta$ より $t:0\to 1$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$ であり，$dt=\sin\theta d\theta$ である。

よって，求める体積をVとすると

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\pi+2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta\right)\sin\theta d\theta$$

ここで，

$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin\theta d\theta=\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

$$V_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\cos 2\theta\sin\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta(1-2\sin^2\theta)\sin\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\theta\sin\theta-4\theta\sin^3\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\theta\sin\theta-4\theta\cdot\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta\sin 3\theta-\theta\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\left\{\left[\theta\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{3}\cos 3\theta\right)d\theta\right\}-\left\{\left[\theta\cdot\left(-\cos\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos\theta\right)d\theta\right\}$$

$$=\left[\frac{1}{9}\sin 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{9}-1=-\frac{10}{9}$$

$$V_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\sin\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta\cos\theta d\theta=\left[\frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

であるから，

$$V=V_1+V_2-V_3=\pi-\frac{10}{9}-\frac{2}{3}=\pi-\frac{16}{9}$$

[東京大学 2003 年前期 理科 $\boxed{4}$]

2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1) $s_1,\ s_2,\ s_3$ を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

---

(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1$ である。

よって $s_1=\alpha+\beta=4$

$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=18$$

$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=76$$

また，$n \geqq 3$ に対し

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)-\alpha\beta\left(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}\right)=4s_{n-1}+s_{n-2}$$ である。

(2) $\beta=2-\sqrt{5}$ であるから $-1<\beta<0$ なので -1

(3) $s_{2003}=\alpha^{2003}+\beta^{2003}$ であり，$-1<\beta<0$ から $-1<\beta^{2003}<0$ である。

$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$ なので，$s_{2003}<\alpha^{2003}<s_{2003}+1$ となるから

α^{2003} 以下の最大の整数は s_{2003} である。

さらに，$s_4=4s_3+s_2=322$，$s_5=4s_4+s_3=1364$，$s_6=4s_5+s_4=5778$ であるから

s_n の 1 の位は $s_n=4s_{n-1}+s_{n-2}$ より帰納的に $4,\ 8,\ 6,\ 2$ を繰り返すことがわかる。

したがって s_{2003} の 1 の位は s_3 の 1 の位と等しいので 6 である。

[東京大学 2003 年前期 理科 $\boxed{5}$]

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(3) X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ。

(注意) さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

---

(1) X_n が 5 で割り切れないのは，毎回 5 以外の目が出るときである。

余事象の確率より求める確率は $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

(2) X_n が 4 で割り切れないのは，

「毎回奇数が出る」または「2 または 6 が 1 回だけ出て，残りは奇数が出る」ときである。

余事象の確率より求める確率は $1-\left\{\left(\dfrac{3}{6}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\left(\dfrac{3}{6}\right)^{n-1}\right\}=1-\left(1+\dfrac{2}{3}n\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(3) A : X_n が 20 で割り切れない事象

B : X_n が 5 で割り切れない事象

C : X_n が 4 で割り切れない事象

とおく。

このとき，$P(A)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$ である。

ここで，X_n が 5 でも 4 でも割り切れないのは

「毎回 1 または 3 が出る」または「2 または 6 が 1 回だけ出て，残りは 1 または 3 が出る」

ときであるから，$P(B\cap C)=\left(\dfrac{2}{6}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\left(\dfrac{2}{6}\right)^{n-1}=(1+n)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ である。

(1), (2) と $1-p_n=P(A)$ より

$$1-p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n-(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

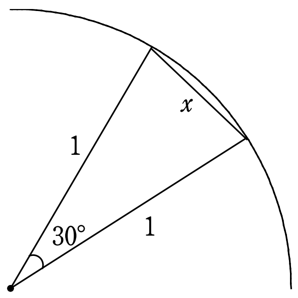
したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{5}{6}+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}\right]$$

ここで，$-1<r<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\log\frac{5}{6}$

[東京大学 2003 年前期 理科 $\boxed{6}$]

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。



円周率は，「円周の長さの直径の長さに対する比」である。

半径 1 の円周に正 12 角形が内接しているものとする。

正 12 角形の 1 辺の長さを x とすると，余弦定理より

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

ここで，$1.73 < \sqrt{3} < 1.74$ であるから $2 - \sqrt{3} > 0.26$ である。

また，円周の長さと正 12 角形の周の長さの関係から $2\pi > 12x \Leftrightarrow \pi^2 > 36x^2$ なので

$$\pi^2 > 36 \times 0.26 = 9.36 > 3.05^2 = 9.3025$$

となる。よって $\pi > 3.05$ が成り立つ。