[東京大学 2003 年前期 理科 $\boxed{5}$]

★――――――――――――――――――――★

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(3) X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ。

(注意）さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

★――――――――――――――――――――★

(1) X_n が 5 で割り切れないのは，毎回 5 以外の目が出るときである。

余事象の確率より求める確率は $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

(2) X_n が 4 で割り切れないのは，

「毎回奇数が出る」または「2 または 6 が 1 回だけ出て，残りは奇数が出る」ときである。

余事象の確率より求める確率は $1-\left\{\left(\dfrac{3}{6}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\left(\dfrac{3}{6}\right)^{n-1}\right\}=1-\left(1+\dfrac{2}{3}n\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(3) A ： X_n が 20 で割り切れない事象

B ： X_n が 5 で割り切れない事象

C ： X_n が 4 で割り切れない事象

とおく。

このとき，$P(A)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$ である。

ここで，X_n が 5 でも 4 でも割り切れないのは

「毎回 1 または 3 が出る」または「2 または 6 が 1 回だけ出て，残りは 1 または 3 が出る」

ときであるから，$P(B\cap C)=\left(\dfrac{2}{6}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\left(\dfrac{2}{6}\right)^{n-1}=(1+n)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ である。

(1)，(2) と $1-p_n=P(A)$ より

$$1-p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n-(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

したがって $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{5}{6}+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}\right]$$

ここで，$-1<r<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であるから $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\log\frac{5}{6}$