[東京大学 2003 年前期 理科 $\boxed{4}$]

2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。

$n=1, 2, 3, \cdots$ に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

---

(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1$ である。

よって $s_1=\alpha+\beta=4$

$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=18$$

$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=76$$

また，$n \geqq 3$ に対し

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)-\alpha\beta\left(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}\right)=4s_{n-1}+s_{n-2}$$ である。

(2) $\beta=2-\sqrt{5}$ であるから $-1<\beta<0$ なので -1

(3) $s_{2003}=\alpha^{2003}+\beta^{2003}$ であり，$-1<\beta<0$ から $-1<\beta^{2003}<0$ である。

$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$ なので，$s_{2003}<\alpha^{2003}<s_{2003}+1$ となるから

α^{2003} 以下の最大の整数は s_{2003} である。

さらに，$s_4=4s_3+s_2=322$，$s_5=4s_4+s_3=1364$，$s_6=4s_5+s_4=5778$ であるから

s_n の 1 の位は $s_n=4s_{n-1}+s_{n-2}$ より帰納的に $4, 8, 6, 2$ を繰り返すことがわかる。

したがって s_{2003} の 1 の位は s_3 の 1 の位と等しいので 6 である。