[東京大学 2003 年前期 理科 $\boxed{2}$]

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1) $\angle\mathrm{APB}$ を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

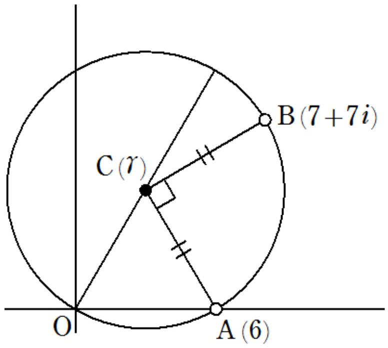
(1) $z=\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=\dfrac{14(t-3)}{(t-7)-ti}$ とおくと

$$\frac{(7+7i)-z}{6-z}=\frac{(7+7i)-\dfrac{14(t-3)}{(t-7)-ti}}{6-\dfrac{14(t-3)}{(t-7)-ti}}=\frac{-7-49i}{-8t-6ti}=\frac{7}{2t}\cdot\frac{1+7i}{4+3i}$$

$$=\frac{7}{2t}\cdot\frac{1+7i}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}=\frac{7}{2t}\cdot\frac{25+25i}{25}=\frac{7}{2t}(1+i)=\frac{7\sqrt{2}}{2t}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$

よって，$(7+7i)-z=\dfrac{7\sqrt{2}}{2t}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\cdot(6-z)$ であるので $\angle\mathrm{APB}=45^\circ$

(2) (1)より点 P は 2 定点 A, B を見込む角が 45° となる円周上を動く。



その円の中心を C とし，これを表す複素数を γ とすると

△ABC は $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$\gamma-6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\{(7+7i)-6\}$$

$$\gamma=6+\frac{1}{2}(1+i)(1+7i)=3+4i$$

よって，OP が最大になるのは図より $z=2(3+4i)$ のときである。

したがって $\dfrac{14(t-3)}{(t-7)-ti}=2(3+4i)$

$$7(t-3)=(3+4i)\{(t-7)-ti\}$$

$$7t-21=3t-21+4ti-28i-3ti+4t$$

$$(t-28)i=0$$

よって $t=28$ （これは $t>0$ を満たす）