[東京大学 2003年前期 理科 $\boxed{1}$]

★―――――――――――――――――――――――――――――――――★

a, b, c を実数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A), (B) を満たすとする。

(A) $f(-1) = -1,\ f(1) = 1$

(B) $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し， $f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

★―――――――――――――――――――――――――――――――――★

$g(x) = f(x) - x$ とおくと，(A)より $g(\pm 1) = 0$ である。

因数定理より $g(x) = a(x+1)(x-1)$ と表せる。

よって $f(x) = g(x) + x = ax^2 + x - a$ であり，

$f(x) \leqq 3x^2 - 1 \Leftrightarrow (3-a)x^2 - x + a - 1 \geqq 0$ …①

ここで，$h(x) = (3-a)x^2 - x + a - 1$ とおく。

（ｉ）$a = 3$ のとき

$y = h(x) = -x + 2$ であり $h(-1) = 3$， $h(1) = 1$ であるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ において①は成り立つ。

（ii）$a > 3$ のとき

$y = h(x)$ は上に凸の放物線で， $h(-1) = 3$， $h(1) = 1$ であるから，

$-1 \leqq x \leqq 1$ において①は成り立つ。

（iii）$a < 3$

$y = h(x)$ は下に凸の放物線で，

$$h(x) = (3-a)\left\{x - \frac{1}{2(3-a)}\right\}^2 - \frac{4a^2 - 16a + 13}{4(3-a)}$$ であるから

放物線の軸は $x = \dfrac{1}{2(3-a)} > 0$ である。

（iii－１） $0<\dfrac{1}{2(3-a)}\leqq 1$ 　すなわち　$a\leqq\dfrac{5}{2}$ 　のとき

満たすべき条件は　$-\dfrac{4a^2-16a+13}{4(3-a)}\geqq 0 \iff 4a^2-16a+13\leqq 0$

$$\iff \frac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\frac{4+\sqrt{3}}{2}$$

$a\leqq\dfrac{5}{2}$ であるから　$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}$

（iii－２） $\dfrac{1}{2(3-a)}\geqq 1$ 　すなわち　$\dfrac{5}{2}\leqq a<3$ 　のとき

$h(1)=1$ であるから①は成り立つ。

（iii－１），（iii－２）より（iii）のときの a の値の範囲は　$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a<3$

（ｉ），（ii），（iii）より条件(A), (B) を満たす a の値の範囲は　$a\geqq\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$ 　…②

ここで，$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2\,dx$

$$=\int_{-1}^{1}(4a^2x^2+4ax+1)\,dx$$

$$=2\left[\frac{4a^2}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=\frac{8}{3}a^2+2$$

であり，a が②の範囲を変化するとき

I のとりうる値の範囲は　$I\geqq\dfrac{4\left(11-4\sqrt{3}\right)}{3}$ 　となる。