[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{1}$]

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件(A)，(B)を満たすとする。

(A)　$f(-1)=-1,\ f(1)=1,\ f'(1) \leqq 6$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2-1$

このとき，$I=\int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

$g(x)=f(x)-x$ とおくと，$f(-1)=-1,\ f(1)=1$ より $g(\pm 1)=0$ である。

因数定理より $g(x)=a(x+1)(x-1)$ と表せる。

よって $f(x)=g(x)+x=ax^2+x-a$ であり，$f'(x)=2ax+1$

$f'(1) \leqq 6$ より $2a+1 \leqq 6 \iff a \leqq \dfrac{5}{2}$ …①

また，条件(B)より $f(x) \leqq 3x^2-1 \iff (3-a)x^2-x+a-1 \geqq 0$

ここで，$h(x)=(3-a)x^2-x+a-1$ とおく。

①より $y=h(x)$ は下に凸の放物線で，

$$h(x)=(3-a)\left\{x-\frac{1}{2(3-a)}\right\}^2-\frac{4a^2-16a+13}{4(3-a)}$$ であるから

放物線の軸は $x=\dfrac{1}{2(3-a)}>0$ である。

①のとき $\dfrac{1}{2(3-a)} \leqq 1$ であるから，$0<\dfrac{1}{2(3-a)} \leqq 1$ であり，

満たすべき条件は $-\dfrac{4a^2-16a+13}{4(3-a)} \geqq 0 \iff 4a^2-16a+13 \leqq 0$

$$\iff \frac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \frac{4+\sqrt{3}}{2}$$

$a \leqq \dfrac{5}{2}$ であるから $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$ …②

ここで，$I=\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2\,dx=\int_{-1}^{1}(4a^2x^2+4ax+1)\,dx=2\left[\dfrac{4a^2}{3}x^3+x\right]_0^1=\dfrac{8}{3}a^2+2$

であり，a が②の範囲を変化するとき，I のとりうる値の範囲は $\dfrac{56}{3} \leqq I \leqq \dfrac{4\left(11-4\sqrt{3}\right)}{3}$ となる。

[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{2}$]

a, b を実数とする。次の４つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a,\quad 3x+y \geqq b,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。

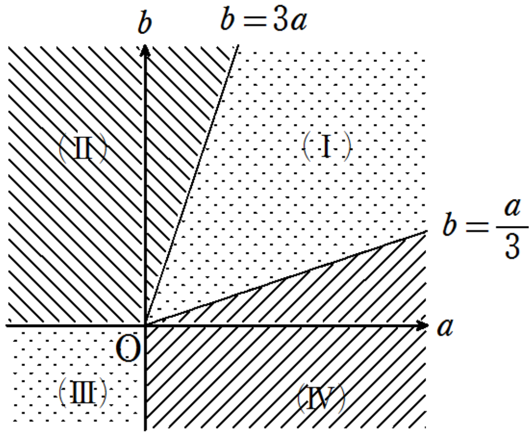
$x+3y \geqq a$，$3x+y \geqq b$ の境界線について

$x+3y=a \quad \Leftrightarrow \quad y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{a}{3} \quad \cdots①$

$3x+y=b \quad \Leftrightarrow \quad y=-3x+b \quad \cdots②$

①②の交点をＰとすると，$\mathrm{P}\left(\dfrac{-a+3b}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$

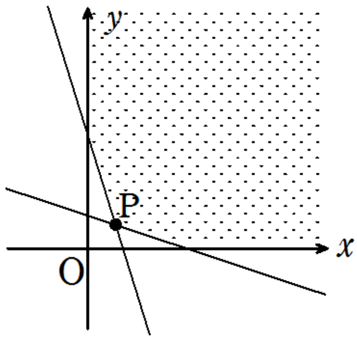
Ｐの存在する領域を右の図の(ｉ)～(iv)に分ける。



(Ⅰ)のとき

D は次の図のようになるので，$x+y$ はＰで最小となる。

このとき，最小値は $\dfrac{-a+3b}{8}+\dfrac{3a-b}{8}=\dfrac{a+b}{4}$

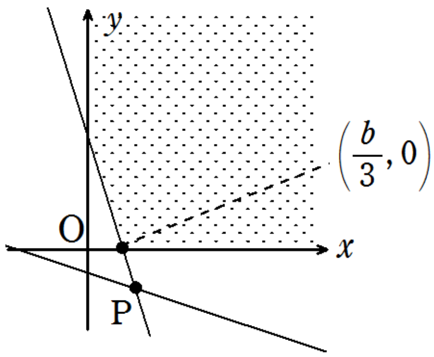


(Ⅱ)のとき

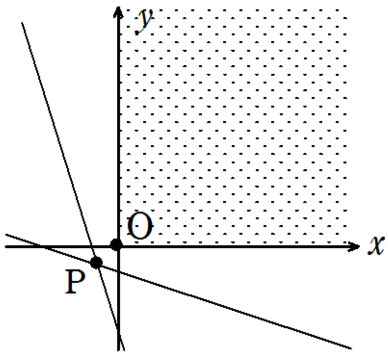
D は次の図のようになるので，

$x+y$ は $\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$ で最小となる。

このとき，最小値は $\dfrac{b}{3}+0=\dfrac{b}{3}$



(Ⅲ)のとき

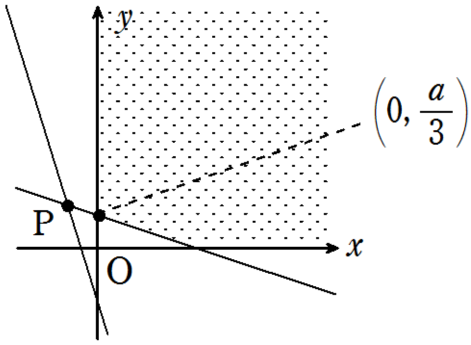


D は次の図のようになるので，

$x+y$ は $(0,\ 0)$ で最小となる。

このとき，最小値は $0+0=0$

(Ⅳ)のとき



D は次の図のようになるので，

$x+y$ は $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$ で最小となる。

このとき，最小値は $0+\dfrac{a}{3}=\dfrac{a}{3}$

以上より

$\dfrac{a}{3}\leqq b\leqq 3a$ のとき $\dfrac{a+b}{4}$

$b\geqq 0,\ b\geqq 3a$ のとき $\dfrac{b}{3}$

$a\leqq 0,\ b\leqq 0$ のとき 0

$a\geqq 0,\ b\geqq 3a$ のとき $\dfrac{a}{3}$

[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{3}$]

２次方程式 $x^2-4x+1=0$ の２つの実数解のうち大きいものを α ，小さいものを β とする。

$n=1, 2, 3, \cdots$ に対し， $s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また， $n \geqq 3$ に対し， s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) s_n は正の整数であることを示し， s_{2003} の１の位の数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の１の位の数を求めよ。

---

(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$ である。

よって $s_1=\alpha+\beta=4$

$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=14$$

$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=52$$

また， $n \geqq 3$ に対し

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=(\alpha+\beta)\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)-\alpha\beta\left(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}\right)=4s_{n-1}-s_{n-2}$$ である。

(2) $\alpha=2+\sqrt{3}>0,\ \ \beta=2-\sqrt{3}>0$ であるから $s_n>0$ である。

したがって， s_n が整数であることを示せばよいが,

漸化式 $s_n=4s_{n-1}-s_{n-2}$ と $s_1=4,\ s_2=14$ より帰納的に s_n は整数となる。

さらに， $s_4=4s_3-s_2=194$ ， $s_5=s_4-s_3=7242$ であるから

s_n の１の位は $s_n=4s_{n-1}+s_{n-2}$ より帰納的に $4, 4, 2$ を繰り返すことがわかる。

したがって s_{2003} の１の位は s_2 の１の位と等しいので 4 である。

(3) $s_{2003}=\alpha^{2003}+\beta^{2003}$ であり， $0<\beta<1$ から $0<\beta^{2003}<1$ である。

$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$ なので， $s_{2003}-1<\alpha^{2003}<s_{2003}$ となるから

(2)の結果より， α^{2003} 以下の最大の整数の１の位は $4-1=3$ である。

[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{4}$]

さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。

以下同様にして， X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして， $X_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots$ を定める。

(1) $X_3=0$ となる確率を求めよ。

(2) 各 n に対し， $X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3) 各 n に対し， $X_n=1$ となる確率を求めよ。

（注意）さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

X_n の取り得る値は $0,\ 1,\ 2,\ 5$ の 4 通りであり，

X_n から X_{n+1} への推移について考えると，次の表のようになる。

X_n ＼ 次に出た目	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	2	2	2	2
5	0	1	2	1	0	5

(1) $X_n=k$ となる確率を $P_n(k)$ と表すものとする。

$$P_{n+1}(0)=P_n(0)\times\frac{6}{6}+P_n(1)\times\frac{1}{6}+P_n(2)\times\frac{2}{6}+P_n(5)\times\frac{2}{6}=P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}P_n(2)+\frac{1}{3}P_n(5)$$

$$P_{n+1}(1)=P_n(0)\times\frac{0}{6}+P_n(1)\times\frac{5}{6}+P_n(2)\times\frac{0}{6}+P_n(5)\times\frac{2}{6}=\frac{5}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}P_n(5)$$

$$P_{n+1}(2)=P_n(0)\times\frac{0}{6}+P_n(1)\times\frac{0}{6}+P_n(2)\times\frac{4}{6}+P_n(5)\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}P_n(2)+\frac{1}{6}P_n(5)$$

$$P_{n+1}(5)=P_n(0)\times\frac{0}{6}+P_n(1)\times\frac{0}{6}+P_n(2)\times\frac{0}{6}+P_n(5)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}P_n(5)$$

であり， $P_1(0)=\dfrac{1}{6},\ P_1(1)=\dfrac{1}{3},\ P_1(2)=\dfrac{1}{3},\ P_1(5)=\dfrac{1}{6}$ であるから

$$P_3(0)=P_2(0)+\frac{1}{6}P_2(1)+\frac{1}{3}P_2(2)+\frac{1}{3}P_2(5)$$

$$=\left(P_1(0)+\frac{1}{6}P_1(1)+\frac{1}{3}P_1(2)+\frac{1}{3}P_1(5)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}P_1(1)+\frac{1}{3}P_1(5)\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}P_1(2)+\frac{1}{6}P_1(5)\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}P_1(5)\right)$$

$$=P_1(0)+\frac{11}{36}P_1(1)+\frac{5}{9}P_1(2)+\frac{1}{2}P_1(5)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{11}{36}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{29}{54}$$

(2) 毎回 6 が出るときであるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3) 求めるものは $P_n(1)$ である。

$$P_{n+1}(1)=\frac{5}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}P_n(5)$$

$$=\frac{5}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \cdots（＊）$$

（＊）の両辺を 6^{n+1} 倍して

$$6^{n+1}P_{n+1}(1)=5\cdot 6^n P_n(1)+2$$

$6^n P_n(1)=a_n$ とおくと $a_{n+1}=5a_n+2$， $a_1=6P_1(1)=6\cdot\frac{1}{3}=2$

これを解くと $a_n=-\frac{1}{2}+\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}5^{n-1}=-\frac{1}{2}+\frac{5^n}{2}$

よって求める確率は

$$P_n(1)=\frac{1}{6^n}a_n=\frac{1}{6^n}\left(-\frac{1}{2}+\frac{5^n}{2}\right)=\frac{5^n-1}{2\cdot 6^n}$$