[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{4}$]

さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。

以下同様にして， X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして， $X_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots$ を定める。

(1) $X_3=0$ となる確率を求めよ。

(2) 各 n に対し， $X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3) 各 n に対し， $X_n=1$ となる確率を求めよ。

（注意）さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

X_n の取り得る値は $0,\ 1,\ 2,\ 5$ の 4 通りであり，

X_n から X_{n+1} への推移について考えると，次の表のようになる。

X_n ＼ 次に出た目	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	2	2	2	2
5	0	1	2	1	0	5

(1) $X_n=k$ となる確率を $P_n(k)$ と表すものとする。

$$P_{n+1}(0)=P_n(0)\times\frac{6}{6}+P_n(1)\times\frac{1}{6}+P_n(2)\times\frac{2}{6}+P_n(5)\times\frac{2}{6}=P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}P_n(2)+\frac{1}{3}P_n(5)$$

$$P_{n+1}(1)=P_n(0)\times\frac{0}{6}+P_n(1)\times\frac{5}{6}+P_n(2)\times\frac{0}{6}+P_n(5)\times\frac{2}{6}=\frac{5}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}P_n(5)$$

$$P_{n+1}(2)=P_n(0)\times\frac{0}{6}+P_n(1)\times\frac{0}{6}+P_n(2)\times\frac{4}{6}+P_n(5)\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}P_n(2)+\frac{1}{6}P_n(5)$$

$$P_{n+1}(5)=P_n(0)\times\frac{0}{6}+P_n(1)\times\frac{0}{6}+P_n(2)\times\frac{0}{6}+P_n(5)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}P_n(5)$$

であり， $P_1(0)=\frac{1}{6},\ P_1(1)=\frac{1}{3},\ P_1(2)=\frac{1}{3},\ P_1(5)=\frac{1}{6}$ であるから

$$P_3(0)=P_2(0)+\frac{1}{6}P_2(1)+\frac{1}{3}P_2(2)+\frac{1}{3}P_2(5)$$

$$=\left(P_1(0)+\frac{1}{6}P_1(1)+\frac{1}{3}P_1(2)+\frac{1}{3}P_1(5)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}P_1(1)+\frac{1}{3}P_1(5)\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}P_1(2)+\frac{1}{6}P_1(5)\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}P_1(5)\right)$$

$$=P_1(0)+\frac{11}{36}P_1(1)+\frac{5}{9}P_1(2)+\frac{1}{2}P_1(5)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{11}{36}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{29}{54}$$

(2) 毎回 6 が出るときであるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3) 求めるものは $P_n(1)$ である。

$$P_{n+1}(1)=\frac{5}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}P_n(5)$$

$$=\frac{5}{6}P_n(1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \cdots（＊）$$

（＊）の両辺を6^{n+1}倍して

$$6^{n+1}P_{n+1}(1)=5\cdot 6^n P_n(1)+2$$

$6^n P_n(1)=a_n$ とおくと $a_{n+1}=5a_n+2$，$a_1=6P_1(1)=6\cdot\frac{1}{3}=2$

これを解くと $a_n=-\frac{1}{2}+\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}5^{n-1}=-\frac{1}{2}+\frac{5^n}{2}$

よって求める確率は

$$P_n(1)=\frac{1}{6^n}a_n=\frac{1}{6^n}\left(-\frac{1}{2}+\frac{5^n}{2}\right)=\frac{5^n-1}{2\cdot 6^n}$$