[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{3}$]

２次方程式 $x^2-4x+1=0$ の２つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。

$n=1, 2, 3, \cdots$ に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また，$n≧3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の１の位の数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の１の位の数を求めよ。

---

(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$ である。

よって $s_1=\alpha+\beta=4$

$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=14$$

$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=52$$

また，$n≧3$ に対し

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)-\alpha\beta\left(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}\right)=4s_{n-1}-s_{n-2}$$ である。

(2) $\alpha=2+\sqrt{3}>0,\ \beta=2-\sqrt{3}>0$ であるから $s_n>0$ である。

したがって，s_n が整数であることを示せばよいが，

漸化式 $s_n=4s_{n-1}-s_{n-2}$ と $s_1=4,\ s_2=14$ より帰納的に s_n は整数となる。

さらに，$s_4=4s_3-s_2=194$，$s_5=s_4-s_3=7242$ であるから

s_n の１の位は $s_n=4s_{n-1}+s_{n-2}$ より帰納的に $4, 4, 2$ を繰り返すことがわかる。

したがって s_{2003} の１の位は s_2 の１の位と等しいので 4 である。

(3) $s_{2003}=\alpha^{2003}+\beta^{2003}$ であり，$0<\beta<1$ から $0<\beta^{2003}<1$ である。

$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$ なので，$s_{2003}-1<\alpha^{2003}<s_{2003}$ となるから

(2)の結果より，α^{2003} 以下の最大の整数の１の位は $4-1=3$ である。