［ 東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{2}$ ］

$a,\ b$ を実数とする。次の４つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a,\quad 3x+y \geqq b,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。

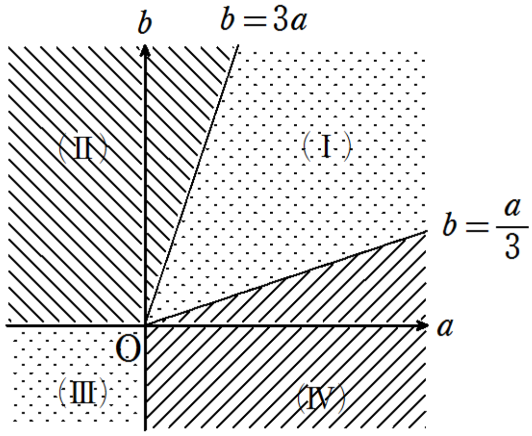
$x+3y \geqq a$，$3x+y \geqq b$ の境界線について

$$x+3y=a \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{a}{3} \quad \cdots①$$

$$3x+y=b \quad \Leftrightarrow \quad y=-3x+b \quad \cdots②$$

①②の交点をＰとすると，$\mathrm{P}\left(\dfrac{-a+3b}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$

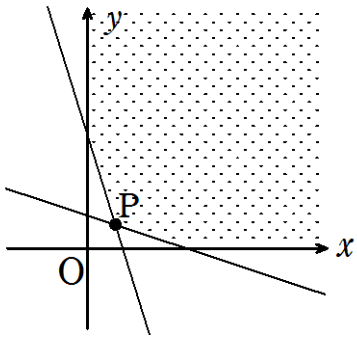
Ｐの存在する領域を右の図の(ⅰ)～(ⅳ)に分ける。



(Ⅰ)のとき

D は次の図のようになるので，$x+y$ はＰで最小となる。

このとき，最小値は $\dfrac{-a+3b}{8}+\dfrac{3a-b}{8}=\dfrac{a+b}{4}$

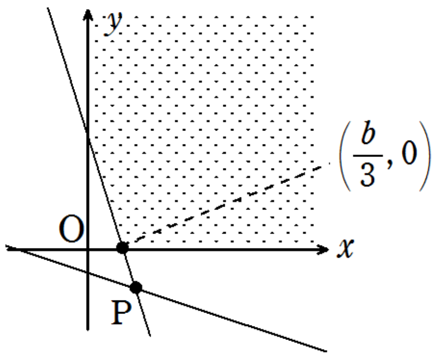


(Ⅱ)のとき

D は次の図のようになるので，

$x+y$ は$\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$で最小となる。

このとき，最小値は $\dfrac{b}{3}+0=\dfrac{b}{3}$

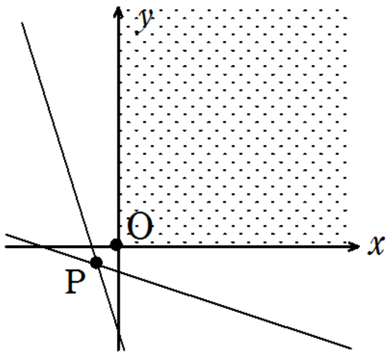


(Ⅲ)のとき

D は次の図のようになるので，

$x+y$ は $(0,\ 0)$ で最小となる。

このとき，最小値は $0+0=0$

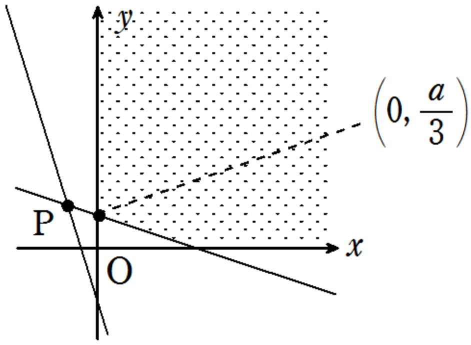


(Ⅳ)のとき

D は次の図のようになるので，

$x+y$ は $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$ で最小となる。

このとき，最小値は $0+\dfrac{a}{3}=\dfrac{a}{3}$



以上より

$\dfrac{a}{3}\leqq b\leqq 3a$ のとき $\dfrac{a+b}{4}$

$b\geqq 0,\ b\geqq 3a$ のとき $\dfrac{b}{3}$

$a\leqq 0,\ b\leqq 0$ のとき 0

$a\geqq 0,\ b\geqq 3a$ のとき $\dfrac{a}{3}$