［ 東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{1}$ ］

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A)，(B)を満たすとする。

(A) $f(-1) = -1,\ f(1) = 1,\ f'(1) \leqq 6$

(B) $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，$I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

$g(x) = f(x) - x$ とおくと，$f(-1) = -1,\ f(1) = 1$ より $g(\pm 1) = 0$ である。

因数定理より $g(x) = a(x+1)(x-1)$ と表せる。

よって $f(x) = g(x) + x = ax^2 + x - a$ であり，$f'(x) = 2ax + 1$

$f'(1) \leqq 6$ より $2a + 1 \leqq 6 \iff a \leqq \dfrac{5}{2}$ …①

また，条件(B)より $f(x) \leqq 3x^2 - 1 \iff (3-a)x^2 - x + a - 1 \geqq 0$

ここで，$h(x) = (3-a)x^2 - x + a - 1$ とおく。

①より $y = h(x)$ は下に凸の放物線で，

$$h(x) = (3-a)\left\{x - \frac{1}{2(3-a)}\right\}^2 - \frac{4a^2 - 16a + 13}{4(3-a)}$$ であるから

放物線の軸は $x = \dfrac{1}{2(3-a)} > 0$ である。

①のとき $\dfrac{1}{2(3-a)} \leqq 1$ であるから，$0 < \dfrac{1}{2(3-a)} \leqq 1$ であり，

満たすべき条件は $-\dfrac{4a^2 - 16a + 13}{4(3-a)} \geqq 0 \iff 4a^2 - 16a + 13 \leqq 0$

$$\iff \frac{4 - \sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \frac{4 + \sqrt{3}}{2}$$

$a \leqq \dfrac{5}{2}$ であるから $\dfrac{4 - \sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$ …②

ここで，$I = \int_{-1}^{1} (2ax+1)^2\, dx = \int_{-1}^{1} (4a^2x^2 + 4ax + 1)\, dx = 2\left[\dfrac{4a^2}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \dfrac{8}{3}a^2 + 2$

であり，a が②の範囲を変化するとき，I のとりうる値の範囲は $\dfrac{56}{3} \leqq I \leqq \dfrac{4\left(11 - 4\sqrt{3}\right)}{3}$ となる。