[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{1}$]

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A)，(B)を満たすとする。

(A) $f(-1) = -1,\ f(1) = 1,\ f'(1) \leqq 6$

(B) $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し， $f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき， $I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{2}$]

$a,\ b$ を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a,\quad 3x+y \geqq b,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。

[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{3}$]

☆ ☆

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。

$n=1, 2, 3, \cdots$ に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の 1 の位の数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 2003 年前期 文科 $\boxed{4}$]

☆―――――☆

さいころを振り, 出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし, 1 で割った余りは 0 である。さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして， X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。このようにして， X_n, $n=1, 2, \cdots$ を定める。

(1) $X_3=0$ となる確率を求めよ。

(2) 各 n に対し， $X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3) 各 n に対し， $X_n=1$ となる確率を求めよ。

（注意）さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

☆―――――☆