[東京大学 2002 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

実数全体で定義された関数 $f(x)=xe^{-x^3}$ を考える。

(1) $f(x)$ の増減，凹凸を調べ $f(x)$ のグラフの概形を図示せよ。

(2) 正の数 C に対して $y=f(x)$ と x 軸，および $x=C$ で囲まれた領域を D_1 とする。D_1 を x 軸のまわりに回転させてえられる立体の体積を $V_1(C)$ とおくとき

$$\lim_{C\to\infty} V_1(C)$$

を求めよ。

(3) $y=f(x)$ の $x\geqq 0$ における最大値を M とするとき $y=f(x)$ と y 軸，および $y=M$ で囲まれた領域を D_2 とおく。D_2 を y 軸のまわりに回転させてえられる立体の体積 V_2 を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 2002 年後期 $\boxed{2}$]

xyz 空間において次のような 3 つの互いに合同な長方形 $L_1,\ L_2,\ L_3$ を考える。

- L_1 は xy 平面に含まれ， $\mathrm{P}_1(a,\ b,\ 0),\ \mathrm{Q}_1(-a,\ b,\ 0),\ \mathrm{R}_1(-a,\ -b,\ 0),\ \mathrm{S}_1(a,\ -b,\ 0)$ を頂点とする。
- L_2 は yz 平面に含まれ， $\mathrm{P}_2(0,\ a,\ b),\ \mathrm{Q}_2(0,\ -a,\ b),\ \mathrm{R}_2(0,\ -a,\ -b),\ \mathrm{S}_2(0,\ a,\ -b)$ を頂点とする。
- L_3 は zx 平面に含まれ， $\mathrm{P}_3(b,\ 0,\ a),\ \mathrm{Q}_3(b,\ 0,\ -a),\ \mathrm{R}_3(-b,\ 0,\ -a),\ \mathrm{S}_3(-b,\ 0,\ a)$ を頂点とする。

ここで $a > b > c$ とする。このとき次の問に答えよ。

(1) $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積，および $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ と原点 O との距離を求めよ。

(2) 四面体 $\mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ および四面体 $\mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2\mathrm{S}_2$ の体積をそれぞれ求めよ。

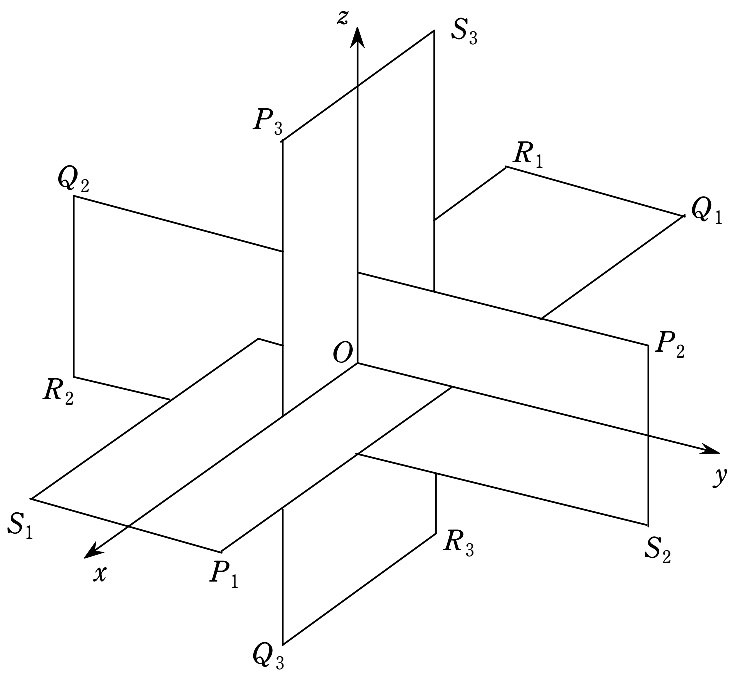
(3) $L_1,\ L_2,\ L_3$ の 12 頂点から 3 点を選び三角形をつくる。

このとき $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ または $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{S}_2$ と合同な三角形が 20 個えられる。これらの三角形で囲まれる二十面体を D とする。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ なる θ に対して

$$a = \cos\theta,\ b = \sin\theta$$

とおくとき D の体積 V を $t = \tan\theta$ の関数 $V(t)$ として表せ。

(4) $0 < t < 1$ において $V(t)$ は最大値をとることを示し，そのとき t の値を求めよ。



[東京大学 2002 年後期 $\boxed{3}$]

区間$[0, 1]$において関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(x \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(x > \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

とおく。$0 \leqq a_1 \leqq 1$ を満たす実数 a_1 を初期値として数列$\{a_n\}$を

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n=2, 3, \cdots)$$

で定める。このとき次の問に答えよ。

(1) $f(b)=b$ を満たす，$0 \leqq b \leqq 1$ なる実数 b をすべて求めよ。

(2) a_4 が(1)で求めた b の値の 1 つに等しくなるような初期値 a_1 をすべて求めよ。

(3) 条件

「ある $n \geqq 1$ に対して，a_n が(1)で求めた b の値の 1 つに等しくなる」

を満たす初期値 a_1 はどのような実数として表されるか。

(4) 初期値 a_1 が(3)の条件を満たさないとき，$a_n \geqq \dfrac{3}{4}$ となるような $n \geqq 1$ が存在することを示せ。

(5) 数列$\{a_n\}$が収束するために初期値 a_1 が満たすべき必要十分条件を求めよ。