



区間 $[0, 1]$ において関数 $f(x)$ を



$$f(x) = \begin{cases} 2x & \left(x \leq \frac{1}{2} \right) \\ -2x+2 & \left(x > \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

とおく。 $0 < a_1 < 1$ を満たす実数 a_1 を初期値として数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき次の問に答えよ。

- (1) $f(b) = b$ を満たす, $0 < b < 1$ なる実数 b をすべて求めよ。
- (2) a_4 が(1)で求めた b の値の 1 つに等しくなるような初期値 a_1 をすべて求めよ。
- (3) 条件

「ある $n \geq 1$ に対して, a_n が(1)で求めた b の値の 1 つに等しくなる」
を満たす初期値 a_1 はどのような実数として表されるか。

- (4) 初期値 a_1 が(3)の条件を満たさないとき, $a_n > \frac{3}{4}$ となるような $n \geq 1$ が存在することを示せ。
- (5) 数列 $\{a_n\}$ が収束するために初期値 a_1 が満たすべき必要十分条件を求めよ。

