[ 東京大学 2002 年後期 $\boxed{2}$ ]

$xyz$ 空間において次のような 3 つの互いに合同な長方形 $L_1,\ L_2,\ L_3$ を考える。

- $L_1$ は $xy$ 平面に含まれ， $\mathrm{P}_1(a,\ b,\ 0),\ \mathrm{Q}_1(-a,\ b,\ 0),\ \mathrm{R}_1(-a,\ -b,\ 0),\ \mathrm{S}_1(a,\ -b,\ 0)$ を頂点とする。
- $L_2$ は $yz$ 平面に含まれ， $\mathrm{P}_2(0,\ a,\ b),\ \mathrm{Q}_2(0,\ -a,\ b),\ \mathrm{R}_2(0,\ -a,\ -b),\ \mathrm{S}_2(0,\ a,\ -b)$ を頂点とする。
- $L_3$ は $zx$ 平面に含まれ， $\mathrm{P}_3(b,\ 0,\ a),\ \mathrm{Q}_3(b,\ 0,\ -a),\ \mathrm{R}_3(-b,\ 0,\ -a),\ \mathrm{S}_3(-b,\ 0,\ a)$ を頂点とする。

ここで $a > b > c$ とする。このとき次の問に答えよ。

(1) $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積，および $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ と原点 O との距離を求めよ。

(2) 四面体 $\mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ および四面体 $\mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2\mathrm{S}_2$ の体積をそれぞれ求めよ。

(3) $L_1,\ L_2,\ L_3$ の 12 頂点から 3 点を選び三角形をつくる。

このとき $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ または $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{S}_2$ と合同な三角形が 20 個えられる。これらの三角形で囲まれる二十面体を $D$ とする。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ なる $\theta$ に対して

$$a = \cos\theta,\ b = \sin\theta$$

とおくとき $D$ の体積 $V$ を $t = \tan\theta$ の関数 $V(t)$ として表せ。

(4) $0 < t < 1$ において $V(t)$ は最大値をとることを示し，そのとき $t$ の値を求めよ。