[東京大学 2002 年前期 理科 $\boxed{1}$]

2 つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta$$

$$y = -2\sqrt{3}(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$$

が異なる 2 点で交わるような一般角θの範囲を求めよ。

$y = 2\sqrt{3}(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta$ …①

$y = -2\sqrt{3}(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$ …②

①，②から y を消去して

$$2\sqrt{3}(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta = -2\sqrt{3}(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\cos^2\theta + \sin\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\left(1 - \sin^2\theta\right) + \sin\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\sin^2\theta - \sin\theta - 2\sqrt{3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\theta + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\sin\theta - 2\right) > 0 \quad \cdots (*)$$

ここで，$\sqrt{3}\sin\theta - 2 < 0$ あるから

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\theta + \sqrt{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，n を整数として，求めるθの範囲は

$$\frac{4}{3}\pi + 2n\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi + 2n\pi$$

[東京大学 2002年前期 理科 $\boxed{2}$]

☆─────────────────────────────────────☆

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1) 数列 $a_n,\ b_n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ は

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n,\ b_n$ は共に正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

☆─────────────────────────────────────☆

(1) x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商を $\mathrm{Q}_n(x)$ とすると

$$x^{n+1}=\left(x^2-x-1\right)\mathrm{Q}_n(x)+a_nx+b_n$$

両辺に x をかけて

$$x^{n+2}=x\left(x^2-x-1\right)\mathrm{Q}_n(x)+a_nx^2+b_nx$$

$$=x\left(x^2-x-1\right)\mathrm{Q}_n(x)+a_n\left(x^2-x-1\right)+\left(a_n+b_n\right)x+a_n$$

$$=\left(x^2-x-1\right)\left\{x\mathrm{Q}_n(x)+a_n\right\}+\left(a_n+b_n\right)x+a_n$$

x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ であるから，係数を比較して

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

(2) $a_n,\ b_n$ はともに正の整数で，互いに素であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$x^2=\left(x^2-x-1\right)\cdot1+x+1$ であるから $a_1=b_1=1$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき

$a_k,\ b_k$ がともに正の整数で，互いに素であると仮定する。

このとき，(1)より

$$a_{k+1} = a_k + b_k, \quad b_{k+1} = a_k$$

であるから， a_{k+1}, b_{k+1} はともに正の整数である。

また， a_{k+1}, b_{k+1} が互いに素でないと仮定すると

$$a_k = b_{k+1}$$

$$b_k = a_{k+1} - a_k = a_{k+1} - b_{k+1}$$

より， a_k, b_k も互いに素でないことになり矛盾。

よって， a_{k+1}, b_{k+1} は互いに素である。

(ｉ)(ii)より a_n, b_n はともに正の整数で，互いに素である。

［ 東京大学 2002 年前期 理科 $\boxed{3}$ ］

　xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする。S の外側にある点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，

$$\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{AR}$$

であるような点 P の動く範囲 V を求め，V の体積は 10 より小さいことを示せ。

球面 S の方程式は　$x^2+y^2+z^2=1$　…①

$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ とすると，OP を直径とする球面の方程式は

$$(x-0,\ y-0,\ z-0)\cdot(x-a,\ y-b,\ z-c)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x-a)+y(y-b)+z(z-c)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0 \quad \cdots②$$

となる。

①−②より，L の方程式は

$ax+by+cz-1=0$

よって，点と平面の距離から

$$\mathrm{PQ}=\frac{|a^2+b^2+c^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}，\quad \mathrm{AR}=\frac{|-c-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

となる。条件より　$\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{AR}$　であるから

$$\frac{|a^2+b^2+c^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leqq \frac{|-c-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad |a^2+b^2+c^2-1| \leqq |-c-1| \quad \cdots③$$

ここで，$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ は S の外部にあるから　$a^2+b^2+c^2>1$　であり，

$$③ \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2-1 \leqq |c+1| \quad \cdots④$$

となる。

（ⅰ）$c \geqq -1$のとき

④　⇔　$a^2+b^2+c^2-1 \leqq c+1$

　　⇔　$a^2+b^2+\left(c-\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

となるが，$a^2+b^2+c^2>1$ と合わせると

$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$は「$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 中心，半径$\dfrac{3}{2}$の球の球面および内部」から

「原点中心，半径１の球の球面および内部」を除いた範囲を動く。

（ⅱ）$c<-1$のとき

④　⇔　$a^2+b^2+c^2-1 \leqq -(c+1)$

　　⇔　$a^2+b^2+\left(c+\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

となるが，$a^2+b^2+c^2>1$ と合わせると

この条件を満たす$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$は存在しない。

よって，点Pの動く範囲Vは，

球面Sの外側で，$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$中心，半径$\dfrac{3}{2}$の球から，原点中心，半径１の球を取り除いたもの

になり，その体積は

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{19}{6}\pi$$

となる。

$$\frac{19}{6}\pi<\frac{19}{6}\times 3.15=9.975<10$$

であるから，題意は示された。

[東京大学 2002 年前期 理科 $\boxed{4}$]

☆────────────────────────────────────☆

a は正の実数とする。xy 平面の y 軸上に点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ をとる。関数

$$y=\frac{x^2}{x^2+1}$$

のグラフを C とする。C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件：Q における C の接線が直線 PQ と直交する。

☆────────────────────────────────────☆

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称であり，

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

である。

条件を満たす P が存在するとき，Q における C の法線と y 軸との交点が P である。

$\mathrm{Q}\left(t,\ f(t)\right)$（$t\neq 0$）における法線の方程式は

$$y-f(t)=-\frac{\left(t^2+1\right)^2}{2t}\left(x-t\right)\quad\Leftrightarrow\quad y=-\frac{\left(t^2+1\right)^2}{2t}x+\frac{\left(t^2+1\right)^2}{2}+\frac{t^2}{t^2+1}$$

であり，この法線の y 切片が a であるから

$$a=g(t)=\frac{\left(t^2+1\right)^2}{2}+\frac{t^2}{t^2+1}\quad\cdots（*）$$

となる。（*）が $t\neq 0$ の解をもつような定数 a の範囲を求めればよい。

$$g'(t)=2t\left(t^2+1\right)+\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{2t\left(t^2+1\right)^3+2t}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{2t\left\{\left(t^2+1\right)^3+1\right\}}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{2t\left(t^2+2\right)\left\{\left(t^2+1\right)^2-\left(t^2+1\right)+1\right\}}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{2t\left(t^2+2\right)\left(t^4+t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$$

であるから， $g(t)$ の増減は下表に従う。

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$

これと $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} g(t)=\infty$ であることより，

求める a の値の範囲は $a>\dfrac{1}{2}$

[東京大学 2002 年前期 理科 $\boxed{5}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

O を原点とする xyz 空間に点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ をとる。

また，z 軸上 $z \geqq 0$ の部分に，点 Q_k を線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の長さが 1 になるようにとる。

三角錐 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ の体積を V_k とおいて，極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$$

を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$, $\mathrm{P}_{k+1}\left(\dfrac{k+1}{n},\ 1-\dfrac{k+1}{n},\ 0\right)$ であるから

$$\triangle \mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1} = \frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)-\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k+1}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}-\frac{k(k+1)}{n^2}-\frac{k+1}{n}+\frac{k(k+1)}{n^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{2n}$$

$\mathrm{Q}_k(0,\ 0,\ z_k)$ とおくと，$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k = 1$ より

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2+{z_k}^2=1$$

$${z_k}^2=\frac{2k}{n}-\frac{2k^2}{n^2}=\frac{2k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

$z_k \geqq 0$ より　$z_k=\sqrt{\dfrac{2k}{n}\left(1-\dfrac{k}{n}\right)}$

よって

$$V_k=\frac{1}{3}\triangle \mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\cdot z_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx$$

ここで，$\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx$ は

$$y=\sqrt{x(1-x)} \text{ とおくと } x^2-x+y^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

であるから

xy 平面上で $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の $y\geqq 0$ の部分と x 軸で囲む部分の面積を表し，

$$\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}$$

となる。

よって，求める極限は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{48}\pi$$

[東京大学 2002 年前期 理科 $\boxed{6}$]

☆―――☆

N を正の整数とする。$2N$ 個からなる数列

$$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N\}$$

を

$$\{b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \cdots,\ b_N,\ a_N\}$$

という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列は b_1 を初項とし，b_i の次に a_i， a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる。また，数列 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において，数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す。

たとえば， $N=3$ のとき，$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ をシャッフルすると $\{4,\ 1,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3\}$ となるので，

$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6,\ f(4)=1,\ f(5)=3,\ f(6)=5$ である。

(1) 数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2) $1 \leqq k \leqq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し， $f(k)-2k$ は $2N+1$ で割り切れることを示せ。

(3) n を正の整数とし， $N=2^{n-1}$ のときを考える。数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると，$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ にもどることを証明せよ。

☆―――☆

(1) 1 回シャッフルすると $\{5,\ 1,\ 6,\ 2,\ 7,\ 3,\ 8,\ 4\}$

さらにもう 1 回シャッフルすると $\{7,\ 5,\ 3,\ 1,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2\}$

さらにもう 1 回シャッフルすると $\{8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\}$ これが求める数列である。

(2) 数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,N,\ N+1,\ N+2,\ \cdots,\ 2N\}$ …（＊）を 1 回シャッフルすると

$$\{N+1,\ 1,\ N+2,\ 2,\ N+3,\ 3,\ \cdots,2N,\ N\}$$

となる。

$1 \leqq k \leqq N$ に対し，（＊）の数列の前半部分 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N\}$ の k 番目の数は，

シャッフルしたときに $2k$ 番目に移動するので， $f(k)=2k$ である。

よって， $f(k)-2k=0$ より $2N+1$ で割り切れる。

また，$N+1 \leqq k \leqq 2N$ に対し，(＊)の数列の後半部分 $\{N+1,\ N+2,\ \cdots,\ 2N\}$ の $k-N$ 番目の数は，

シャッフルしたときに $2(k-N)-1$ 番目に移動するので， $f(k)=2(k-N)-1$ である。

よって， $f(k)-2K=-2N-1$ より $2N+1$ で割り切れる。よって題意は示された。

(3) (2)より $f(k)$ と $2k$ は $2N+1$ で割ったときの余りが等しい。

したがって， $f(k) \equiv 2k$ （$\mathrm{mod}\ \ 2N+1$） である。

次に， $N=2^{n-1}$ のとき，数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n\}$ を 1 回シャッフルすると

$1 \leqq k \leqq 2^n$ を満たす任意の k に対して

$$f(k) \equiv 2k \quad (\mathrm{mod}\ \ 2^n+1)$$

さらにもう 1 回（2 回目の）シャッフルすると

$$f\left(f\left(k\right)\right) \equiv 2f\left(k\right) \equiv 2\left(2k\right) = 2^2 k \quad (\mathrm{mod}\ \ 2^n+1)$$

さらにもう 1 回（3 回目の）シャッフルすると

$$f\left(f\left(f\left(k\right)\right)\right) \equiv 2^2 f\left(k\right) \equiv 2^2\left(2k\right) \equiv 2^3 k \quad (\mathrm{mod}\ \ 2^n+1)$$

となる。同様にして， $2n$ 回続けてシャッフルしたとき， $f^{2n}\left(k\right)$ と表すとすると

$$f^{2n}\left(k\right) \equiv 2^{2n} k \quad (\mathrm{mod}\ \ 2^n+1)$$

となる。ここで，

$$2^{2n}k-k=\left(2^{2n}-1\right)k=\left(2^n+1\right)\left(2^n-1\right)k$$

となるので，

$$2^{2n}k-k \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \ 2^n+1)$$

である。したがって，

$$f^{2n}\left(k\right) \equiv k \quad (\mathrm{mod}\ \ 2^n+1)$$

となり，$1 \leqq k \leqq 2^n$ から $f^{2n}\left(k\right)=k$ である。

よって，数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると，元に戻る。