［ 東京大学 2002 年前期 理科 $\boxed{5}$ ］

☆───☆

O を原点とする xyz 空間に点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ をとる。

また，z 軸上 $z \geqq 0$ の部分に，点 Q_k を線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の長さが 1 になるようにとる。

三角錐 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ の体積を V_k とおいて，極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$$

を求めよ。

☆───☆

$\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$, $\mathrm{P}_{k+1}\left(\dfrac{k+1}{n},\ 1-\dfrac{k+1}{n},\ 0\right)$ であるから

$$\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1} = \frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)-\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k+1}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}-\frac{k(k+1)}{n^2}-\frac{k+1}{n}+\frac{k(k+1)}{n^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{2n}$$

$\mathrm{Q}_k(0,\ 0,\ z_k)$ とおくと，$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=1$ より

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2+{z_k}^2=1$$

$${z_k}^2=\frac{2k}{n}-\frac{2k^2}{n^2}=\frac{2k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

$z_k \geqq 0$ より $\quad z_k=\sqrt{\dfrac{2k}{n}\left(1-\dfrac{k}{n}\right)}$

よって

$$V_k=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\cdot z_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx$$

ここで，$\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx$ は

$y=\sqrt{x(1-x)}$ とおくと $x^2-x+y^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$

であるから

xy 平面上で $\left(\frac{1}{2},\,0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の $y\geqq 0$ の部分と x 軸で囲む部分の面積を表し，

$$\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}$$

となる。

よって，求める極限は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{48}\pi$$