［ 東京大学 2002 年前期 理科 $\boxed{4}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

a は正の実数とする。xy 平面の y 軸上に点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ をとる。関数

$$y=\frac{x^2}{x^2+1}$$

のグラフを C とする。C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件：Q における C の接線が直線 PQ と直交する。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称であり，

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

である。

条件を満たす P が存在するとき，Q における C の法線と y 軸との交点が P である。

$\mathrm{Q}\left(t,\ f(t)\right)$（$t\neq 0$）における法線の方程式は

$$y-f(t)=-\frac{\left(t^2+1\right)^2}{2t}\left(x-t\right)\quad\Leftrightarrow\quad y=-\frac{\left(t^2+1\right)^2}{2t}x+\frac{\left(t^2+1\right)^2}{2}+\frac{t^2}{t^2+1}$$

であり，この法線の y 切片が a であるから

$$a=g(t)=\frac{\left(t^2+1\right)^2}{2}+\frac{t^2}{t^2+1}\quad\cdots（＊）$$

となる。（＊）が $t\neq 0$ の解をもつような定数 a の範囲を求めればよい。

$$g'(t)=2t\left(t^2+1\right)+\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{2t\left(t^2+1\right)^3+2t}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{2t\left\{\left(t^2+1\right)^3+1\right\}}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{2t\left(t^2+2\right)\left\{\left(t^2+1\right)^2-\left(t^2+1\right)+1\right\}}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{2t\left(t^2+2\right)\left(t^4+t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$$

であるから，$g(t)$ の増減は下表に従う。

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$

これと $\displaystyle\lim_{t \to \pm\infty} g(t) = \infty$ であることより，

求める a の値の範囲は $a > \dfrac{1}{2}$