［ 東京大学 2002 年前期 理科 $\boxed{1}$ ］

2 つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2 + \sin\theta$$

$$y = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2 - \sin\theta$$

が異なる 2 点で交わるような一般角θの範囲を求めよ。

$y = 2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2 + \sin\theta \quad \cdots①$

$y = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2 - \sin\theta \quad \cdots②$

①，②から y を消去して

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2 + \sin\theta = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2 - \sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\cos^2\theta + \sin\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\left(1-\sin^2\theta\right) + \sin\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\sin^2\theta - \sin\theta - 2\sqrt{3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\theta+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\sin\theta-2\right) > 0 \quad \cdots（＊）$$

ここで，$\sqrt{3}\sin\theta - 2 < 0$ あるから

（＊） $\Leftrightarrow \quad 2\sin\theta + \sqrt{3} < 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，n を整数として，求めるθの範囲は

$$\frac{4}{3}\pi + 2n\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi + 2n\pi$$