［ 東京大学 2002 年前期 文科 $\boxed{1}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

2 つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$$

$$y = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

が相異なる 2 点で交わるようなθの範囲を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$とする。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$y = 2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta \quad \cdots①$

$y = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta \quad \cdots②$

①，②から y を消去して

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\cos^2\theta+\sin\theta<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\left(1-\sin^2\theta\right)+\sin\theta<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\theta+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\sin\theta-2\right)>0 \quad \cdots（＊）$$

ここで，$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$ あるから

$$（＊） \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\theta+\sqrt{3}<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，n を整数として，求めるθの範囲は

$240^\circ<\theta<300^\circ$

[東京大学 2002 年前期 文科 $\boxed{2}$]

☆――――☆

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

（1）数列 $a_n,\ b_n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ は

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

（2） $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n,\ b_n$ は共に正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

☆――――☆

（1） x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商を $Q_n(x)$ とすると

$$x^{n+1}=\left(x^2-x-1\right)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

両辺に x をかけて

$$\begin{aligned} x^{n+2}&=x\left(x^2-x-1\right)Q_n(x)+a_nx^2+b_nx \\ &=x\left(x^2-x-1\right)Q_n(x)+a_n\left(x^2-x-1\right)+\left(a_n+b_n\right)x+a_n \\ &=\left(x^2-x-1\right)\left\{xQ_n(x)+a_n\right\}+\left(a_n+b_n\right)x+a_n \end{aligned}$$

x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ であるから，係数を比較して

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

（2） $a_n,\ b_n$ はともに正の整数で，互いに素であることを数学的帰納法で示す。

（ｉ） $n=1$ のとき

$x^2=\left(x^2-x-1\right)\cdot1+x+1$ であるから $a_1=b_1=1$ より成り立つ。

（ii） $n=k$ のとき

$a_k,\ b_k$ がともに正の整数で，互いに素であると仮定する。

このとき，（1）より

$$a_{k+1}=a_k+b_k,\quad b_{k+1}=a_k$$

であるから， a_{k+1}, b_{k+1} はともに正の整数である。

また， a_{k+1}, b_{k+1} が互いに素でないと仮定すると

$$a_k=b_{k+1}$$

$$b_k=a_{k+1}-a_k=a_{k+1}-b_{k+1}$$

より， a_k, b_k も互いに素でないことになり矛盾。

よって， a_{k+1}, b_{k+1} は互いに素である。

(ｉ)(ii)より a_n, b_n はともに正の整数で，互いに素である。

[東京大学 2002 年前期 文科 $\boxed{3}$]

2 つの関数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx$$

$$g(x)=px^3+qx^2+rx$$

が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$f'(0)=g'(0),\ f(-1)=-1,\ f'(-1)=0$$

$$g(1)=3,\ g'(1)=0$$

ここで $f(x),\ g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x),\ g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで，定積分

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$$

の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。ただし， $f''(x),\ g''(x)$ がそれぞれ $f'(x),\ g'(x)$ の導関数を表す。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$， $g(x)=px^3+qx^2+rx$ より

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$， $g'(x)=3px^2+2qx+r$

$f'(0)=g'(0)$ より $c=r$ …①

$f(-1)=-1$ より $-a+b-c=-1$ …②

$f'(-1)=0$ より $3a-2b+c=0$ …③

$g(1)=3$ より $p+q+r=3$ …④

$g'(1)=0$ より $3p+2q+r=0$ …⑤

②，③より $b=2a+1$， $c=a+2$ …⑥

④，⑤より $q=-2p-3$， $r=p+6$ …⑦

①，⑥，⑦より $a+2=p+6 \iff p=a-4$ …⑧

⑦，⑧より $q=-2a+5$ …⑨

ここで， $f''(x)=6ax+2b$， $g''(x)=6px+2q$ より

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx=\int_{-1}^{0}(6ax+2b)^2dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(36a^2x^2+24abx+4b^2\right)dx$$

$$=\left[12a^2x^3+12abx^2+4b^2x\right]_{-1}^{0}$$

$$=12a^2-12ab+4b^2$$

$$=12a^2-12a(2a+1)+4(2a+1)^2$$

$$=4a^2+4a+4$$

$$\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx=\int_{0}^{1}(6px+2q)^2dx$$

$$=\int_{0}^{1}\left(36p^2x^2+24pqx+4q^2\right)dx$$

$$=\left[12p^2x^3+12pqx^2+4q^2x\right]_{0}^{1}$$

$$=12p^2+12pq+4q^2$$

$$=12(a-4)^2+12(a-4)(-2a+5)+4(-2a+5)^2$$

$$=4a^2-20a+52$$

であるから

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx=\left(4a^2+4a+4\right)+\left(4a^2-20a+52\right)$$

$$=8a^2-16a+56$$

$$=8(a-1)^2+48$$

となり，$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$ は $a=1$ のときに最小値 48 をとる。

このとき，

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx=ax^3+(2a+1)x^2+(a+2)x=x^3+3x^2+3x$$

$$g(x)=px^3+qx^2+rx=(a-4)x^3+(-2a+5)x^2+(a+2)x=-3x^3+3x^2+3x$$

である。

［ 東京大学 2002 年前期 文科 $\boxed{4}$ ］

☆ ☆

円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし， $m \geqq 1,\ n \geqq 1$ であるとする。

☆ ☆

1 個の赤い点に着目する。

ここから反時計回りに点の色を見ていくとき，

2 つの点の並びが「赤青」の順のものをＡ，「青赤」の順のものをＢとする。

2 つの点の並びが「赤赤」「青青」のものを無視すると，

Ａ → Ｂ → Ａ → Ｂ → …… → Ａ → Ｂ

の順に並び，最後はＢで終わる。

よって，ＡとＢの数は同数になるから，両端の色が異なるものは偶数個である。