[ 東京大学 2002 年前期 文科 $\boxed{3}$ ]

2 つの関数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx$$

$$g(x)=px^3+qx^2+rx$$

が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$f'(0)=g'(0),\ f(-1)=-1,\ f'(-1)=0$$

$$g(1)=3,\ g'(1)=0$$

ここで $f(x),\ g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x),\ g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで，定積分

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$$

の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。ただし， $f''(x),\ g''(x)$ がそれぞれ $f'(x),\ g'(x)$ の導関数を表す。

---

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$， $g(x)=px^3+qx^2+rx$ より

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$， $g'(x)=3px^2+2qx+r$

$f'(0)=g'(0)$ より $c=r$ …①

$f(-1)=-1$ より $-a+b-c=-1$ …②

$f'(-1)=0$ より $3a-2b+c=0$ …③

$g(1)=3$ より $p+q+r=3$ …④

$g'(1)=0$ より $3p+2q+r=0$ …⑤

②，③より $b=2a+1$， $c=a+2$ …⑥

④，⑤より $q=-2p-3$， $r=p+6$ …⑦

①，⑥，⑦より $a+2=p+6 \iff p=a-4$ …⑧

⑦，⑧より $q=-2a+5$ …⑨

ここで， $f''(x)=6ax+2b$， $g''(x)=6px+2q$ より

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx=\int_{-1}^{0}(6ax+2b)^2dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(36a^2x^2+24abx+4b^2\right)dx$$

$$=\left[12a^2x^3+12abx^2+4b^2x\right]_{-1}^{0}$$

$$=12a^2-12ab+4b^2$$

$$=12a^2-12a(2a+1)+4(2a+1)^2$$

$$=4a^2+4a+4$$

$$\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx=\int_{0}^{1}(6px+2q)^2dx$$

$$=\int_{0}^{1}\left(36p^2x^2+24pqx+4q^2\right)dx$$

$$=\left[12p^2x^3+12pqx^2+4q^2x\right]_{0}^{1}$$

$$=12p^2+12pq+4q^2$$

$$=12(a-4)^2+12(a-4)(-2a+5)+4(-2a+5)^2$$

$$=4a^2-20a+52$$

であるから

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx=\left(4a^2+4a+4\right)+\left(4a^2-20a+52\right)$$

$$=8a^2-16a+56$$

$$=8(a-1)^2+48$$

となり，$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$ は $a=1$ のときに最小値 48 をとる。

このとき，

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx=ax^3+(2a+1)x^2+(a+2)x=x^3+3x^2+3x$$

$$g(x)=px^3+qx^2+rx=(a-4)x^3+(-2a+5)x^2+(a+2)x=-3x^3+3x^2+3x$$

である。