[東京大学 2002 年前期 文科 $\boxed{2}$]

☆ ☆

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを $a_n x+b_n$ とおく。

(1) 数列 $a_n, b_n, n=1, 2, 3, \cdots$ は

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

(2) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，a_n, b_n は共に正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

☆ ☆

(1) x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商を $\mathrm{Q}_n(x)$ とすると

$$x^{n+1}=\left(x^2-x-1\right)\mathrm{Q}_n(x)+a_n x+b_n$$

両辺に x をかけて

$$\begin{aligned} x^{n+2} &= x\left(x^2-x-1\right)\mathrm{Q}_n(x)+a_n x^2+b_n x \\ &= x\left(x^2-x-1\right)\mathrm{Q}_n(x)+a_n\left(x^2-x-1\right)+\left(a_n+b_n\right)x+a_n \\ &= \left(x^2-x-1\right)\left\{x\mathrm{Q}_n(x)+a_n\right\}+\left(a_n+b_n\right)x+a_n \end{aligned}$$

x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ であるから，係数を比較して

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

(2) a_n, b_n はともに正の整数で，互いに素であることを数学的帰納法で示す。

（ i ）$n=1$ のとき

$x^2=\left(x^2-x-1\right)\cdot 1+x+1$ であるから $a_1=b_1=1$ より成り立つ。

（ ii ）$n=k$ のとき

a_k, b_k がともに正の整数で，互いに素であると仮定する。

このとき，(1)より

$$a_{k+1} = a_k + b_k, \quad b_{k+1} = a_k$$

であるから，a_{k+1}, b_{k+1} はともに正の整数である。

また，a_{k+1}, b_{k+1} が互いに素でないと仮定すると

$$a_k = b_{k+1}$$

$$b_k = a_{k+1} - a_k = a_{k+1} - b_{k+1}$$

より，a_k, b_k も互いに素でないことになり矛盾。

よって，a_{k+1}, b_{k+1} は互いに素である。

(ｉ)(ⅱ)より a_n, b_n はともに正の整数で，互いに素である。