［ 東京大学 2002 年前期 文科 $\boxed{1}$ ］

2 つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$$

$$y = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

が相異なる 2 点で交わるようなθの範囲を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$とする。

$y = 2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$ …①

$y = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ …②

①，②から y を消去して

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\cos^2\theta+\sin\theta<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\left(1-\sin^2\theta\right)+\sin\theta<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\theta+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\sin\theta-2\right)>0 \quad \cdots（＊）$$

ここで，$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$ あるから

（＊） $\Leftrightarrow$ $2\sin\theta+\sqrt{3}<0$

$\Leftrightarrow$ $\sin\theta<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，n を整数として，求めるθの範囲は

$240^\circ<\theta<300^\circ$