[東京大学 2001 年後期 $\boxed{1}$]

任意の自然数 $n \geqq 2$ にに対して，常に不等式

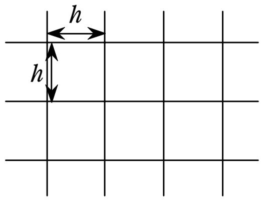
$$n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}} \geqq \frac{i}{10}$$

が成立するような最大の整数 i を求めよ。

［ 東京大学 2001 年後期 $\boxed{1}$ ］

(1) 図 1 のように，等間隔 h で格子状に互いに直交する 2 組の無数の平行線が引いてある平面が与えられている。その上に半径 1 の円 C を無作為に落とすとき，この円がちょうど 2 本の線と交わる確率 p を求めよ。

図1



(2) 図 2 のように，半径 $\sqrt{2}+1$ の円が重複なく，かつ隣り合う円と接して無数に敷き詰められた平面がある。この上に半径 1 の円 C を無作為に落とすとき，その円 C が平面上のちょうど 3 つの円と交わる確率 q を求めよ。

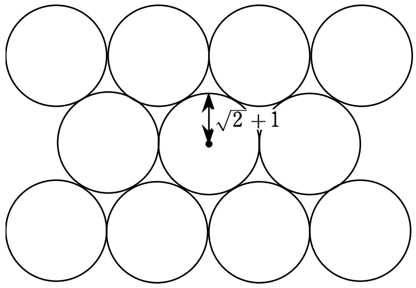
ただし，解答にあたり次のことを用いてよい。

平面上に共に原点 O を始点とする一次独立な 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を考え，点 O と $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}$ の 3 つのベクトルの終点の 4 点を頂点とする平行四辺形を E とする。E の領域 F に対して，F を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の整数係数の一次結合 $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$ によって平行移動したもの全体の和集合を D とする。即ち記号で書くと

$$D=\{\mathbf{x}+m\mathbf{a}+n\mathbf{b} \mid \mathbf{x}\in F,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}\}$$

とおく，ここで $\mathbb{Z}$ は整数全体を表す。

図2



このとき平面に 1 点 P を無作為に落とすとき，その点が D 内に落ちる確率は，F の面積の平行四辺形 E の面積に対する比になっている。

[東京大学 2001 年後期 $\boxed{3}$]

☆────────────────────────────☆

整数を係数とする 2 次多項式 $f(x)$ で 2 次の項の係数が正であるものが与えられている。任意の実数 x に対して，平面上の原点を中心とし半径が 1 である単位円 C 上の点 $\mathrm{P}(x)$ を

$$\mathrm{P}(x) = (\cos 2\pi f(x),\ \sin 2\pi f(x))$$

によって定める。円周 C の弧 I で長さが L $(0 < L < 2\pi)$ であるものを固定する。そのとき各自然数 k に対して区間 $[k,\ k+1]$ の部分集合

$$\{x \mid k \leqq x \leqq k+1,\ \mathrm{P}(x) \in I\}$$

は互いに交わらない有限個の区間の和集合になっているので，それらの区間の長さの総和を T_k で表す。このとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} T_k = \frac{L}{2\pi}$ を証明せよ。

☆────────────────────────────☆