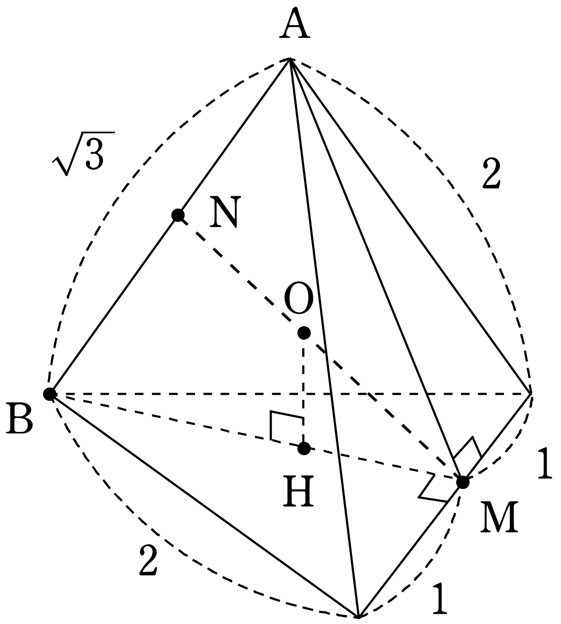
［ 東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{1}$ ］

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{3},\ \mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$$

を満たしている。このとき r の値を求めよ。



球の中心を O とし，O から△BCD に下ろした垂線の足を H とする。

△BCD は正三角形であり，H は△BCD の重心になる。

したがって，辺 CD の中点を M とすると，$\mathrm{BH}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{MH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また，△ABM は一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形であり，辺 AB の中点を N とすると，

3 点 N, O, M は同一直線上にある。

$\angle\mathrm{BMN}=30^\circ$ であるから，$\mathrm{OH}=\mathrm{MH}\tan 30^\circ=\dfrac{1}{3}$

よって，△OHB に着目して

$$r=\mathrm{OB}=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

［ 東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{2}$ ］

次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ一つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ。また，そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)dy+\sin x+\cos x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする。

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)dy+\sin x+\cos x$$

$$=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin x\cos y+\cos x\sin y\right)f(y)dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos x\cos y+\sin x\sin y\right)f(y)dy$$

$$+\sin x+\cos x$$

$$=\frac{a\sin x}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos y\cdot f(y)\,dy+\frac{a\cos x}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin y\cdot f(y)\,dy$$

$$+\frac{b\cos x}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos y\cdot f(y)\,dy+\frac{b\sin x}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin y\cdot f(y)\,dy+\sin x+\cos x$$

ここで，$s=\int_0^{2\pi}\cos y\cdot f(y)\,dy$，$t=\int_0^{2\pi}\sin y\cdot f(y)\,dy$ とおくと，

$$f(x)=\frac{a\sin x}{2\pi}s+\frac{a\cos x}{2\pi}t+\frac{b\cos x}{2\pi}s+\frac{b\sin x}{2\pi}t+\sin x+\cos x$$

$$=\left(\frac{as}{2\pi}+\frac{bt}{2\pi}+1\right)\sin x+\left(\frac{bs}{2\pi}+\frac{at}{2\pi}+1\right)\cos x \quad \cdots①$$

より $f(y)=\left(\frac{as}{2\pi}+\frac{bt}{2\pi}+1\right)\sin y+\left(\frac{bs}{2\pi}+\frac{at}{2\pi}+1\right)\cos y$ であり，

$$\int_0^{2\pi}\sin y\cos y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2y\,dy=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2y}{2}\right]_0^{2\pi}=0$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 2y\right)dy=\frac{1}{2}\left[y-\frac{\sin 2y}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+\cos 2y\right)dy=\frac{1}{2}\left[y+\frac{\sin 2y}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

であるから

$$s=\int_0^{2\pi}\cos y\cdot f(y)\,dy=\left(\frac{bs}{2\pi}+\frac{at}{2\pi}+1\right)\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2s=bs+at+2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-b)s-at=2\pi \quad \cdots②$$

$$t=\int_0^{2\pi}\sin y\cdot f(y)\,dy=\left(\frac{as}{2\pi}+\frac{bt}{2\pi}+1\right)\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2t=as+bt+2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad -as+(2-b)t=2\pi \quad \cdots③$$

となる。②，③より行列で表示すると

$\begin{pmatrix} 2-b & -a \\ -a & 2-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=2\pi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるが，等式を満たす $f(x)$ がただ１つ決まるのは，

②かつ③を満たす $(s,\,t)$ の組がただ１つに決まるときであり，その条件は行列式を計算して

$$\det\begin{pmatrix} 2-b & -a \\ -a & 2-b \end{pmatrix}=(2-b)^2-a^2\neq 0$$

よって，$2-b\neq\pm a$ すなわち $b\neq 2\pm a$ のときである。

このとき

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}&=\frac{2\pi}{(2-b)^2-a^2}\begin{pmatrix} 2-b & a \\ a & 2-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\\&=\frac{2\pi}{(2-b)^2-a^2}\begin{pmatrix} 2-b+a \\ 2-b+a \end{pmatrix}\\&=\frac{2\pi}{(2-b)-a}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$ より $s=t=\dfrac{2\pi}{2-a-b}$

となるから

$$f(x)=\left(\frac{as}{2\pi}+\frac{bt}{2\pi}+1\right)\sin x+\left(\frac{bs}{2\pi}+\frac{at}{2\pi}+1\right)\cos x$$

$$=\left(\frac{a}{2-a-b}+\frac{b}{2-a-b}+1\right)\sin x+\left(\frac{b}{2-a-b}+\frac{a}{2-a-b}+1\right)\cos x$$

$$=\left(\frac{2}{2-a-b}\right)\sin x+\left(\frac{2}{2-a-b}\right)\cos x$$

$$=\frac{2}{2-a-b}(\sin x+\cos x)$$

[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{3}$]

実数 $t>1$ に対し，xy 平面上の点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{P}(1,\ 1),\ \mathrm{Q}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$$

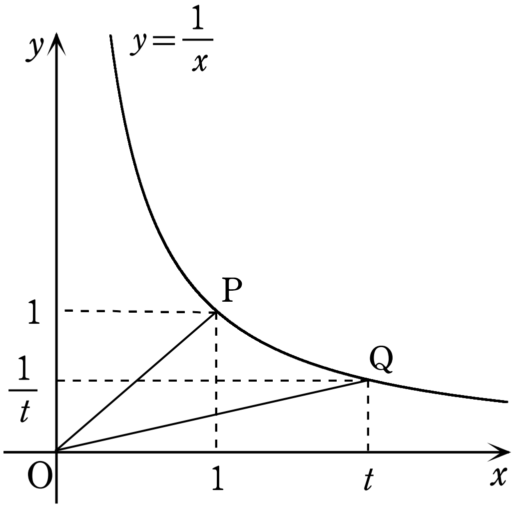
を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP, OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき

$$c(t)=\frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと，関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。

$$a(t)=\frac{1}{2}\left|1\cdot t-1\cdot\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\quad(\because t>1),\quad b(t)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\int_1^t\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{1}{t}=\log t$$

であり，$c'(t)=\dfrac{b'(t)a(t)-b(t)a'(t)}{\{a(t)\}^2}$ である。



示すべきことは「$t>1$ において $c'(t)<0$ となること」である。

ここで，$f(t)=b'(t)a(t)-b(t)a'(t)$ とおく。

$$f(t)=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\log t\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2t^2}\{(t^2-1)-(t^2+1)\log t\}$$

であり，さらに $g(t)=(t^2-1)-(t^2+1)\log t$ とおく。

$$g'(t)=2t-2t\log t-\frac{t^2+1}{t}=t-\frac{1}{t}-2t\log t$$

$$g''(t)=1+\frac{1}{t^2}-2\log t-2=-1+\frac{1}{t^2}-2\log t<0\quad(\because t>1)$$

であるから，$g'(t)$ は $t>1$ で単調減少であり，$g'(t)<g'(1)=0$ より $g(t)$ は $t>1$ で単調減少する。

さらに $g(t)<g(1)=0$ より $f(t)=\dfrac{g(t)}{2t^2}$ は $t>1$ で単調減少であり，$f(t)<f(1)=0$ より

$t>1$ で $c'(t)=\dfrac{f(t)}{\{a(t)\}^2}<0$ となる。よって題意は示された。

［ 東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{4}$ ］

複素数平面上の点 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = i \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおく。ただし，i は虚数単位である。

(1) 3 点 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての $b_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

---

(1)　$a_3 = a_2 + a_1 = i + 1 = 1 + i$，$a_4 = a_3 + a_2 = 1 + i + i = 1 + 2i$

であり，

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{i}{1} = i，\ b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1+i}{i} = 1 - i，\ b_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3+i}{2}$$

であるから，

$$b_1 - b_3 = i - \frac{3+i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i，\ b_2 - b_3 = \left(1 - i\right) - \frac{3+i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

となる。よって

$$b_2 - b_3 = \left(b_1 - b_3\right)i \quad \text{かつ} \quad |b_1 - b_3| = |b_2 - b_3|$$

であるから

$\triangle b_1b_2b_3$ は $\angle b_1b_3b_2 = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

したがって，3 点 $b_1,\ b_2,\ b_3$ は 2 点 $b_1,\ b_2$ を直径の両端とする円であり，

中心は $\dfrac{b_1 + b_2}{2} = \dfrac{1}{2}$，半径は $\dfrac{|b_2 - b_1|}{2} = \dfrac{|1 - 2i|}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

である。

(2)　数学的帰納法により示す。

（ⅰ）$n=1$のとき

$b_1=i$　は(1)より円C上にある。

（ⅱ）$n=k$のとき

b_kが円C上にあるとすると，$\left|b_n-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　…①

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$の両辺をa_{n+1}（$\neq 0$）で割って

$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$　より　$b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$

したがって，$b_n=\dfrac{1}{b_{n+1}-1}$　…②

①，②より

$$\left|\frac{1}{b_{n+1}-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2} \iff \frac{|b_{n+1}-3|}{2|b_{n+1}-1|}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\iff \sqrt{5}|b_{n+1}-1|=|b_{n+1}-3|$$

$$\iff 5(b_{n+1}-1)\overline{(b_{n+1}-1)}=(b_{n+1}-3)\overline{(b_{n+1}-3)}$$

$$\iff 4b_{n+1}\overline{b_{n+1}}-2b_{n+1}-2\overline{b_{n+1}}=4$$

$$\iff b_{n+1}\overline{b_{n+1}}-\frac{1}{2}b_{n+1}-\frac{1}{2}\overline{b_{n+1}}=1$$

$$\iff \left(b_{n+1}-\frac{1}{2}\right)\overline{\left(b_{n+1}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{5}{4}$$

$$\iff \left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{5}{4}$$

$$\iff \left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

よって，b_{k+1}は円C上にあり，$n=k+1$のときも題意は成り立つ。

（ⅰ）（ⅱ）より数学的帰納法から題意は成り立つ。

[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{5}$]

☆――☆

容量 1 リットルの m 個のビーカー(ガラス容器)に水が入っている。$m \geqq 4$ で空のビーカーは無い。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。

このとき，水の入っているビーカーが 2 個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う。

(a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。

(b) さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。

(c) 次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1) $x < \dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2) $x > \dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。

☆――☆

以下，リットルを L，最初に x リットルの水の入っていたビーカーを X で表すものとする。

X はこの操作により，次の①②③のいずれかにたどり着く。

① 途中で空になって取り除かれる。

② x L のまま残る。

③ 水量が増えて残る。

(1) $x < \dfrac{1}{3}$ のときには②にはならないことを背理法で示す。

$x < \dfrac{1}{3}$ のとき，X に最後まで x L の水が入ったまま（②）であると仮定する。

操作を繰り返し行い，ビーカーが 3 つになったとき，他のビーカーに y L，z L（$y \geqq z$）の水が入っているとすると，$z \leqq y \leqq x$ となるが，

$x < \frac{1}{3}$ より $x + y + z < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ となって $x + y + z = 1$ と矛盾する。

よって，題意は示された。

(2) $x > \frac{2}{5}$ のとき，①③にはならないことを背理法で示す。

（ｉ）途中で空になって取り除かれる（①）と仮定する。

x 以上の水量のビーカーが X を含めて 3 つ以上あり，X の水量 x が最小であるので

他のビーカーの水量を $y_1, y_2, \cdots$ とすると，

$x > \frac{2}{5}$ であるから $x + y_1 + y_2 + \cdots > \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \cdots > \frac{6}{5}$ となって

$x + y_1 + y_2 + \cdots = 1$ と矛盾する。

（ii）水量が増えて残る（③）と仮定する。

少なくとも 3 個のビーカーがあり，それらを X（水量 x），Y（水量 y），Z（水量 z）とする。

X の水量が増えたということは，x が 2 番目に小さいときがあったということである。

そのとき，$y \leqq x \leqq z$ であったとすると $z > \frac{2}{5}$，$y < \frac{1}{5}$ である。

このとき，z より多い水量のビーカーは水の総量が 1 L であることに反するので存在しない。

ここで，z の水量を合わせる前の元の状態に戻し，z_1 L，z_2 L に分けると

$y < \frac{1}{5}$ より $z_1 < \frac{1}{5}, z_2 < \frac{1}{5}$ であり，$z = z_1 + z_2 < \frac{2}{5}$ となって $z > \frac{2}{5}$ と矛盾する。

よって，題意は示された。

［ 東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{6}$ ］

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは， A と B を共に正の方向に 1 動かす。

そうでないときは， A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは， A と B を共に正の方向に 1 動かす。

そうでないときは， B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果，A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち， $a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。

(3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。

(1) この試行により，2 点 A, B 間の距離は常に 0 または 1 である。

(ⅰ) n 回の試行後， $a=b$ であるとき

$n+1$回目の試行の結果，必ず $a \neq b$ になる。

(ⅱ) n 回の試行後， $a=b+1$（すなわち， a が b より大きい）であるとき

$n+1$回目に裏が出れば $a=b$ となる。

(ⅲ) n 回の試行後， $b=a+1$（すなわち， b が a より大きい）であるとき

$n+1$回目に表が出れば $a=b$ となる。

したがって， n 回の試行後， $a \neq b$ となる場合の数は $2^n - X_n$ 通りであるから

$$X_{n+1} = 2^n - X_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots ①$$

となる。

(2)　①の両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n}{2^n}+\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right)$$

よって，数列$\left\{\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right\}$は初項$\frac{X_1}{2^1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，公比$-\frac{1}{2}$の等比数列である。

したがって，

$$\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{X_n}{2^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad X_n=\frac{2^n}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$$

(3)　aの値の平均値，すなわち期待値をA_nとおく。

n回後から$n+1$回後にかけてaの変化に注目すると，次の表のようになる。

n回の試行後の状態	その場合の数	$n+1$回の試行後のaの変化	
$a=b$	X_n	表	$+1$
		裏	± 0
$a=b+1$	$\frac{2^n-X_n}{2}$	表	$+1$
		裏	± 0
$b=a+1$	$\frac{2^n-X_n}{2}$	表	$+1$
		裏	$+1$

したがって，

$$A_{n+1}=A_n+\frac{X_n}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\cdot(+1)+\frac{\frac{2^n-X_n}{2}}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\cdot(+1)+\frac{\frac{2^n-X_n}{2}}{2^n}\cdot 1\cdot(+1)$$

$$\Leftrightarrow\quad A_{n+1}-A_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n}{2^n}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n-X_n}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow\quad A_{n+1}-A_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\frac{X_n}{2^n}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$A_n = A_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{X_k}{2^k}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(n-1) + \frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{9}$$ これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって，求める平均値は $\frac{2}{3}n + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{9}$ （$n=1, 2, 3, \cdots$）