[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{6}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。

そうでないときは，A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。

そうでないときは，B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果，A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。

(3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) この試行により，2 点 A, B 間の距離は常に 0 または 1 である。

(i) n 回の試行後，$a=b$ であるとき

$n+1$回目の試行の結果，必ず $a\neq b$ になる。

(ii) n 回の試行後，$a=b+1$（すなわち，a が b より大きい）であるとき

$n+1$回目に裏が出れば $a=b$ となる。

(iii) n 回の試行後，$b=a+1$（すなわち，b が a より大きい）であるとき

$n+1$回目に表が出れば $a=b$ となる。

したがって，n 回の試行後，$a\neq b$ となる場合の数は 2^n-X_n 通りであるから

$$X_{n+1}=2^n-X_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots①$$

となる。

(2)　①の両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n}{2^n}+\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right)$$

よって，数列 $\left\{\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $\frac{X_1}{2^1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，

$$\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_n}{2^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad X_n=\frac{2^n}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$$

(3)　a の値の平均値，すなわち期待値を A_n とおく。

n 回後から $n+1$ 回後にかけて a の変化に注目すると，次の表のようになる。

n 回の試行後の状態	その場合の数	$n+1$ 回の試行後の a の変化	
$a=b$	X_n	表	$+1$
		裏	± 0
$a=b+1$	$\frac{2^n-X_n}{2}$	表	$+1$
		裏	± 0
$b=a+1$	$\frac{2^n-X_n}{2}$	表	$+1$
		裏	$+1$

したがって，

$$A_{n+1}=A_n+\frac{X_n}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\cdot(+1)+\frac{\frac{2^n-X_n}{2}}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\cdot(+1)+\frac{\frac{2^n-X_n}{2}}{2^n}\cdot 1\cdot(+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad A_{n+1}-A_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n}{2^n}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2^n-X_n}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_{n+1}-A_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\frac{X_n}{2^n}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$A_n = A_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{X_k}{2^k}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(n-1) + \frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{1}{9}$$　これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって，求める平均値は $\frac{2}{3}n + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{1}{9}$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$）