［ 東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{5}$ ］

☆──────────────────────────────☆

容量 1 リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。$m \geqq 4$ で空のビーカーは無い。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。

このとき，水の入っているビーカーが 2 個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う。

(a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。

(b) さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。

(c) 次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1) $x < \dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2) $x > \dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。

☆──────────────────────────────☆

以下，リットルをＬ，最初に x リットルの水の入っていたビーカーを X で表すものとする。

X はこの操作により，次の①②③のいずれかにたどり着く。

① 途中で空になって取り除かれる。

② x Ｌのまま残る。

③ 水量が増えて残る。

(1) $x < \dfrac{1}{3}$ のときには②にはならないことを背理法で示す。

$x < \dfrac{1}{3}$ のとき，X に最後まで x Ｌの水が入ったまま（②）であると仮定する。

操作を繰り返し行い，ビーカーが 3 つになったとき，他のビーカーに y L， z L（ $y \geqq z$ ）の水が入っているとすると， $z \leqq y \leqq x$ となるが，

$x < \frac{1}{3}$ より $x + y + z < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ となって $x + y + z = 1$ と矛盾する。

よって，題意は示された。

(2) $x > \frac{2}{5}$ のとき，①③にはならないことを背理法で示す。

（ⅰ）途中で空になって取り除かれる（①）と仮定する。

x 以上の水量のビーカーが X を含めて 3 つ以上あり， X の水量 x が最小であるので

他のビーカーの水量を $y_1, y_2, \cdots$ とすると，

$x > \frac{2}{5}$ であるから $x + y_1 + y_2 + \cdots > \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \cdots > \frac{6}{5}$ となって

$x + y_1 + y_2 + \cdots = 1$ と矛盾する。

（ⅱ）水量が増えて残る（③）と仮定する。

少なくとも 3 個のビーカーがあり，それらを X （水量 x ）， Y （水量 y ）， Z （水量 z ）とする。

X の水量が増えたということは， x が 2 番目に小さいときがあったということである。

そのとき， $y \leqq x \leqq z$ であったとすると $z > \frac{2}{5}$， $y < \frac{1}{5}$ である。

このとき， z より多い水量のビーカーは水の総量が 1 L であることに反するので存在しない。

ここで， z の水量を合わせる前の元の状態に戻し， z_1 L， z_2 L に分けると

$y < \frac{1}{5}$ より $z_1 < \frac{1}{5}, z_2 < \frac{1}{5}$ であり， $z = z_1 + z_2 < \frac{2}{5}$ となって $z > \frac{2}{5}$ と矛盾する。

よって，題意は示された。