[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{4}$]

複素数平面上の点 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = i \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおく。ただし，i は虚数単位である。

(1) 3 点 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての $b_n \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

(1)　$a_3 = a_2 + a_1 = i + 1 = 1 + i$，$a_4 = a_3 + a_2 = 1 + i + i = 1 + 2i$

であり，

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{i}{1} = i,\quad b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1+i}{i} = 1 - i,\quad b_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3+i}{2}$$

であるから，

$$b_1 - b_3 = i - \frac{3+i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i,\quad b_2 - b_3 = (1-i) - \frac{3+i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

となる。よって

$$b_2 - b_3 = (b_1 - b_3)i \quad \text{かつ} \quad |b_1 - b_3| = |b_2 - b_3|$$

であるから

$\triangle b_1 b_2 b_3$ は $\angle b_1 b_3 b_2 = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

したがって，3 点 $b_1,\ b_2,\ b_3$ は 2 点 $b_1,\ b_2$ を直径の両端とする円であり，

中心は $\dfrac{b_1 + b_2}{2} = \dfrac{1}{2}$，半径は $\dfrac{|b_2 - b_1|}{2} = \dfrac{|1 - 2i|}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

である。

(2)　数学的帰納法により示す。

（ｉ）$n=1$のとき

$b_1=i$　は(1)より円C上にある。

（ⅱ）$n=k$のとき

b_kが円C上にあるとすると，$\left|b_n-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　…①

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$の両辺をa_{n+1}（$\neq 0$）で割って

$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$　より　$b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$

したがって，$b_n=\dfrac{1}{b_{n+1}-1}$　…②

①，②より

$$\left|\frac{1}{b_{n+1}-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|b_{n+1}-3|}{2|b_{n+1}-1|}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{5}|b_{n+1}-1|=|b_{n+1}-3|$$

$$\Leftrightarrow\quad 5\left(b_{n+1}-1\right)\overline{\left(b_{n+1}-1\right)}=\left(b_{n+1}-3\right)\overline{\left(b_{n+1}-3\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad 4b_{n+1}\overline{b_{n+1}}-2b_{n+1}-2\overline{b_{n+1}}=4$$

$$\Leftrightarrow\quad b_{n+1}\overline{b_{n+1}}-\frac{1}{2}b_{n+1}-\frac{1}{2}\overline{b_{n+1}}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(b_{n+1}-\frac{1}{2}\right)\overline{\left(b_{n+1}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

よって，b_{k+1}は円C上にあり，$n=k+1$のときも題意は成り立つ。

（ｉ）（ⅱ）より数学的帰納法から題意は成り立つ。