［ 東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{3}$ ］

実数 $t>1$ に対し，xy 平面上の点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{P}(1,\ 1),\ \mathrm{Q}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$$

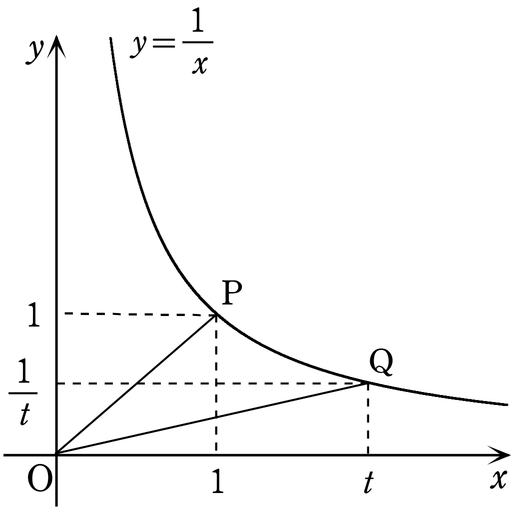
を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP, OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき

$$c(t)=\frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと，関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。

$$a(t)=\frac{1}{2}\left|1\cdot t-1\cdot\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\quad(\because t>1),\quad b(t)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\int_1^t\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{1}{t}=\log t$$

であり，$c'(t)=\dfrac{b'(t)a(t)-b(t)a'(t)}{\{a(t)\}^2}$ である。



示すべきことは「$t>1$ において $c'(t)<0$ となること」である。

ここで，$f(t)=b'(t)a(t)-b(t)a'(t)$ とおく。

$$f(t)=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\log t\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2t^2}\{(t^2-1)-(t^2+1)\log t\}$$

であり，さらに $g(t)=(t^2-1)-(t^2+1)\log t$ とおく。

$$g'(t)=2t-2t\log t-\frac{t^2+1}{t}=t-\frac{1}{t}-2t\log t$$

$$g''(t)=1+\frac{1}{t^2}-2\log t-2=-1+\frac{1}{t^2}-2\log t<0\quad(\because t>1)$$

であるから，$g'(t)$ は $t>1$ で単調減少であり，$g'(t)<g'(1)=0$ より $g(t)$ は $t>1$ で単調減少する。

さらに $g(t)<g(1)=0$ より $f(t)=\dfrac{g(t)}{2t^2}$ は $t>1$ で単調減少であり，$f(t)<f(1)=0$ より

$t>1$ で $c'(t)=\dfrac{f(t)}{\{a(t)\}^2}<0$ となる。よって題意は示された。