［ 東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{2}$ ］

次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ一つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ。また，そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+y) f(y)dy + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)dy + \sin x + \cos x$$

ただし， $f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする。

$$f(x) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+y) f(y)dy + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)dy + \sin x + \cos x$$

$$= \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin x \cos y + \cos x \sin y) f(y)dy + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x \cos y + \sin x \sin y) f(y)dy$$

$$+ \sin x + \cos x$$

$$= \frac{a\sin x}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos y \cdot f(y)\,dy + \frac{a\cos x}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin y \cdot f(y)\,dy$$

$$+ \frac{b\cos x}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos y \cdot f(y)\,dy + \frac{b\sin x}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin y \cdot f(y)\,dy + \sin x + \cos x$$

ここで， $s = \int_0^{2\pi} \cos y \cdot f(y)\,dy$ ， $t = \int_0^{2\pi} \sin y \cdot f(y)\,dy$ とおくと，

$$f(x) = \frac{a\sin x}{2\pi}s + \frac{a\cos x}{2\pi}t + \frac{b\cos x}{2\pi}s + \frac{b\sin x}{2\pi}t + \sin x + \cos x$$

$$= \left(\frac{as}{2\pi} + \frac{bt}{2\pi} + 1\right)\sin x + \left(\frac{bs}{2\pi} + \frac{at}{2\pi} + 1\right)\cos x \quad \cdots①$$

より $f(y) = \left(\frac{as}{2\pi} + \frac{bt}{2\pi} + 1\right)\sin y + \left(\frac{bs}{2\pi} + \frac{at}{2\pi} + 1\right)\cos y$ であり，

$$\int_0^{2\pi} \sin y \cos y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2y\,dy = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2y}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2y)\,dy = \frac{1}{2}\left[y - \frac{\sin 2y}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2y)\,dy = \frac{1}{2}\left[y + \frac{\sin 2y}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

であるから

$$s=\int_0^{2\pi}\cos y\cdot f(y)\,dy=\left(\frac{bs}{2\pi}+\frac{at}{2\pi}+1\right)\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2s=bs+at+2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-b)s-at=2\pi \quad \cdots②$$

$$t=\int_0^{2\pi}\sin y\cdot f(y)\,dy=\left(\frac{as}{2\pi}+\frac{bt}{2\pi}+1\right)\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2t=as+bt+2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad -as+(2-b)t=2\pi \quad \cdots③$$

となる。②，③より行列で表示すると

$\begin{pmatrix}2-b & -a\\ -a & 2-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}=2\pi\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ となるが，等式を満たす $f(x)$ がただ１つ決まるのは，

②かつ③を満たす $(s,\ t)$ の組がただ１つに決まるときであり，その条件は行列式を計算して

$$\det\begin{pmatrix}2-b & -a\\ -a & 2-b\end{pmatrix}=(2-b)^2-a^2\neq 0$$

よって， $2-b\neq \pm a$ すなわち $b\neq 2\pm a$ のときである。

このとき

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}&=\frac{2\pi}{(2-b)^2-a^2}\begin{pmatrix}2-b & a\\ a & 2-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{2\pi}{(2-b)^2-a^2}\begin{pmatrix}2-b+a\\ 2-b+a\end{pmatrix}\\ &=\frac{2\pi}{(2-b)-a}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

より $s=t=\dfrac{2\pi}{2-a-b}$

となるから

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(\frac{as}{2\pi}+\frac{bt}{2\pi}+1\right)\sin x+\left(\frac{bs}{2\pi}+\frac{at}{2\pi}+1\right)\cos x\\ &=\left(\frac{a}{2-a-b}+\frac{b}{2-a-b}+1\right)\sin x+\left(\frac{b}{2-a-b}+\frac{a}{2-a-b}+1\right)\cos x\\ &=\left(\frac{2}{2-a-b}\right)\sin x+\left(\frac{2}{2-a-b}\right)\cos x\\ &=\frac{2}{2-a-b}(\sin x+\cos x)\end{aligned}$$