

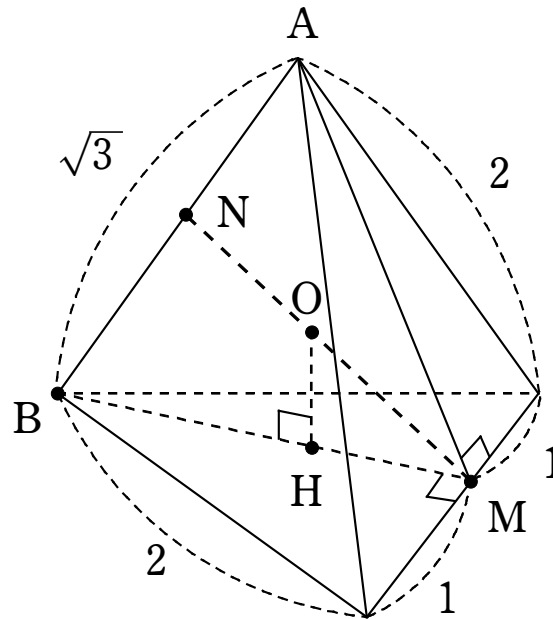
[東京大学 2001 年前期 理科 1]



半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 $ABCD$ の各辺の長さは、

$$AB = \sqrt{3}, AC = AD = BC = BD = CD = 2$$

を満たしている。このとき r の値を求めよ。



球の中心を O とし、 O から $\triangle BCD$ に下ろした垂線の足を H とする。

$\triangle BCD$ は正三角形であり、 H は $\triangle BCD$ の重心になる。

したがって、辺 CD の中点を M とすると、 $BH = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 、 $MH = \frac{1}{\sqrt{3}}$

また、 $\triangle ABM$ は一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形であり、辺 AB の中点を N とすると、
3 点 N, O, M は同一直線上にある。

$\angle BMN = 30^\circ$ であるから、 $OH = MH \tan 30^\circ = \frac{1}{3}$

よって、 $\triangle OHB$ に着目して

$$r = OB = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$