

[ 東京大学 2001 年前期 理科 1 ]



半径  $r$  の球面上に 4 点  $A, B, C, D$  がある。四面体  $ABCD$  の各辺の長さは、

$$AB = \sqrt{3}, AC = AD = BC = BD = CD = 2$$

を満たしている。このとき  $r$  の値を求めよ。



[ 東京大学 2001 年前期 理科 2 ]



次の等式を満たす関数  $f(x)$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) がただ一つ定まるための実数  $a, b$  の条件を求めよ。また、そのときの  $f(x)$  を決定せよ。

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x+y)f(y)dy + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y)dy + \sin x + \cos x$$

ただし、 $f(x)$  は区間  $0 \leq x \leq 2\pi$  で連続な関数とする。



[ 東京大学 2001 年前期 理科 3 ]



実数  $t > 1$  に対し,  $xy$  平面上の点

$$O(0, 0), P(1, 1), Q\left(t, \frac{1}{t}\right)$$

を頂点とする三角形の面積を  $a(t)$  とし, 線分  $OP, OQ$  と双曲線  $xy = 1$  とで囲まれた部分の面積を  $b(t)$  とする。このとき

$$c(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと, 関数  $c(t)$  は  $t > 1$  においてつねに減少することを示せ。





複素数平面上の点  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  を

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = i \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく。ただし、 $i$  は虚数単位である。

(1) 3 点  $b_1, b_2, b_3$  を通る円  $C$  の中心と半径を求めよ。

(2) すべての  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) は円  $C$  の周上にあることを示せ。





容量 1 リットルの  $m$  個のビーカー(ガラス容器)に水が入っている。 $m \geq 4$  で空のビーカーは無い。入っている水の総量は 1 リットルである。また  $x$  リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり、その他のビーカーには  $x$  リットル未満の水しか入っていない。

このとき、水の入っているビーカーが 2 個になるまで、次の (a) から (c) までの操作を、順に繰り返す行う。

- (a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。
- (b) さらに、残りのビーカーの中から、入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。
- (c) 次に、(a) で選んだビーカーの水を (b) で選んだビーカーにすべて移し、空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で、入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは、そのうちいずれも選ばれる可能性があるものとする。

- (1)  $x < \frac{1}{3}$  のとき、最初に  $x$  リットルの水の入っていたビーカーは、操作の途中で空になって取り除かれるか、または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。
- (2)  $x > \frac{2}{5}$  のとき、最初に  $x$  リットルの水の入っていたビーカーは、最後まで  $x$  リットルの水が入ったまま残ることを証明せよ。





コインを投げる試行の結果によって、数直線上にある 2 点  $A, B$  を次のように動かす。

表が出た場合：点  $A$  の座標が点  $B$  の座標より大きいときは、 $A$  と  $B$  を共に正の方向に 1 動かす。

そうでないときは、 $A$  のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点  $B$  の座標が点  $A$  の座標より大きいときは、 $A$  と  $B$  を共に正の方向に 1 動かす。

そうでないときは、 $B$  のみ正の方向に 1 動かす。

最初  $A, B$  は原点にあるものとし、上記の試行を  $n$  回繰り返して  $A$  と  $B$  を動かしていった結果、 $A, B$  の到達した点の座標をそれぞれ  $a, b$  とする。

(1)  $n$  回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数  $2^n$  通りのうち、 $a = b$  となる場合の数を  $X_n$  と

おく。 $X_{n+1}$  と  $X_n$  の関係式を求めよ。

(2)  $X_n$  を求めよ。

(3)  $n$  回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数  $2^n$  通りについての  $a$  の値の平均を求めよ。

