[東京大学 2001 年前期 文科 $\boxed{1}$]

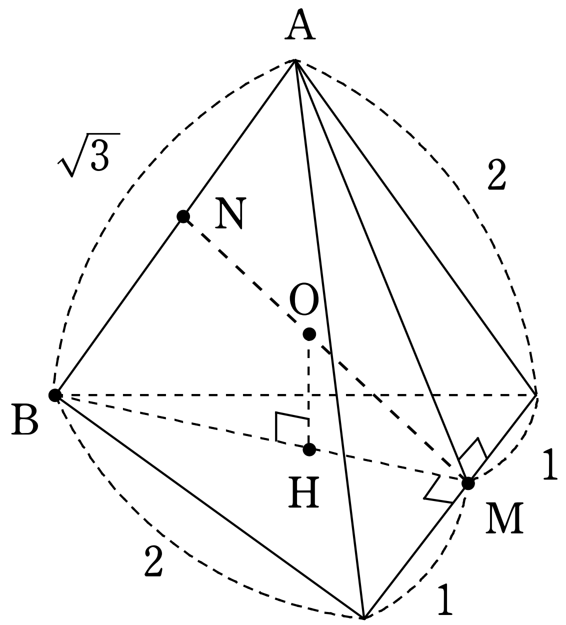
☆ ☆

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは,

$$\mathrm{AB}=\sqrt{3},\ \mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$$

を満たしている。このとき r の値を求めよ。

☆ ☆



球の中心を O とし, O から△BCD に下ろした垂線の足を H とする。

△BCD は正三角形であり, H は△BCD の重心になる。

したがって, 辺 CD の中点を M とすると, $\mathrm{BH}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{MH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また, △ABM は一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形であり, 辺 AB の中点を N とすると,

3 点 N, O, M は同一直線上にある。

$\angle\mathrm{BMN}=30^\circ$ であるから, $\mathrm{OH}=\mathrm{MH}\tan 30^\circ=\dfrac{1}{3}$

よって, △OHB に着目して

$$r=\mathrm{OB}=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

［ 東京大学 2001 年前期 文科 $\boxed{2}$ ］

時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が xy 平面上を動く。点 A の時刻 t での座標は $(t^2,\ 0)$ で与えられる。点 B は，最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが，点 C$(0,\ 3)$ に到達した後は，その点から x 軸に平行な直線上を x 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

$t>0$ のとき，三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

(1) 関数 $S(t)$ $(t>0)$ のグラフの概形を描け。

(2) u を正の実数とするとき，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。

関数 $M(u)$ $(u>0)$ のグラフの概形を描け。

(1)（ⅰ）$0<t\leqq 3$ のとき

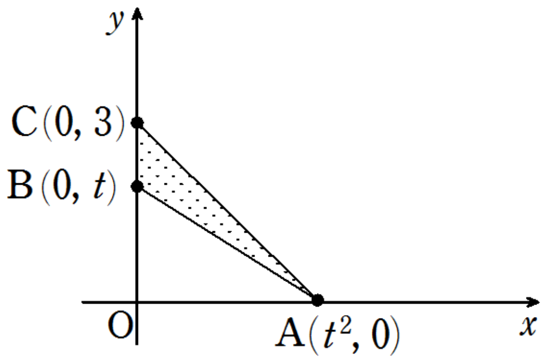
B$(0,\ t)$ であるから

$$S(t)=\frac{1}{2}(3-t)t^2=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2$$

このとき，

$$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2+3t=-\frac{3}{2}t(t-2)$$

であるから，$S(t)$ の増減は下表に従う。

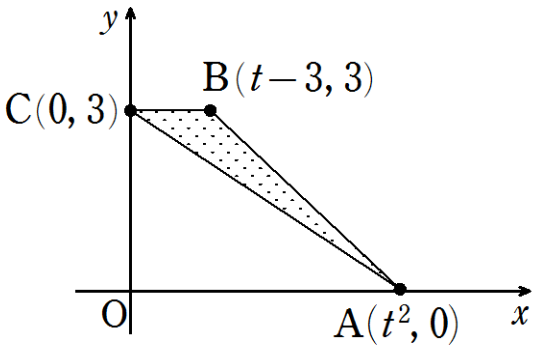


t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	2	↘	0

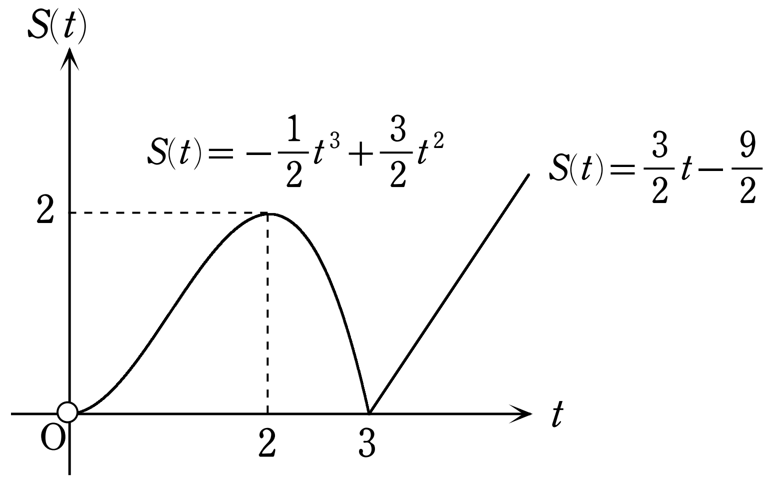
（ⅱ）$t>3$ のとき

B$(t-3,\ 3)$ であるから

$$S(t)=\frac{1}{2}(t-3)\cdot 3=\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}$$



よって，$S(t)$ のグラフは次の図のようになる。



(2)　$t>3$ において $S(t)=2$ となる t を求めると

$\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}=2$　より　$t=\frac{13}{3}$

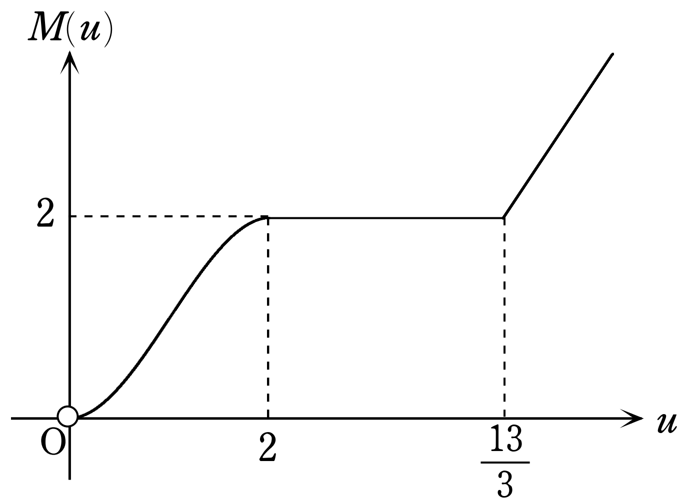
よって，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ は

$0<u\leqq 2$ のとき　　$M(u)=-\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u^2$

$2\leqq u\leqq\frac{13}{3}$ のとき　$M(u)=2$

$u\geqq\frac{13}{3}$ のとき　　$M(u)=\frac{3}{2}u-\frac{9}{2}$

となる。$M(u)$ のグラフを描くと次の図のようになる。



[東京大学 2001年前期 文科 3]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある2点A, Bを次のように動かす。

表が出た場合：点Aの座標が点Bの座標より大きいときは， AとBを共に正の方向に1動かす。

そうでないときは， Aのみ正の方向に1動かす。

裏が出た場合：点Bの座標が点Aの座標より大きいときは， AとBを共に正の方向に1動かす。

そうでないときは， Bのみ正の方向に1動かす。

最初A, Bは原点にあるものとし，上記の試行をn回繰り返してAとBを動かしていった結果，A, Bの到達した点の座標をそれぞれa, bとする。

(1) n回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数2^n通りのうち， $a=b$となる場合の数をX_nとおく。X_{n+1}とX_nの関係式を求めよ。

(2) X_nを求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) この試行により，2点A, B間の距離は常に0または1である。

(ⅰ) n回の試行後， $a=b$であるとき

$n+1$回目の試行の結果，必ず$a \neq b$になる。

(ⅱ) n回の試行後， $a=b+1$（すなわち， aがbより大きい）であるとき

$n+1$回目に裏が出れば$a=b$となる。

(ⅲ) n回の試行後， $b=a+1$（すなわち， bがaより大きい）であるとき

$n+1$回目に表が出れば$a=b$となる。

したがって， n回の試行後， $a \neq b$となる場合の数は$2^n - X_n$通りであるから

$$X_{n+1} = 2^n - X_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots①$$

となる。

(2)　①の両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n}{2^n}+\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right)$$

よって，数列 $\left\{\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $\frac{X_1}{2^1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，

$$\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{X_n}{2^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad X_n=\frac{2^n}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$$

[東京大学 2001 年前期 文科 $\boxed{4}$]

☆────☆

　白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。

　その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。

☆────☆

数直線上を動く点を考え，白石は＋1，黒石は－1 だけ数直線上を点が移動するとする。

最初，点は原点にあるものとする。

白石，黒石を左から 1 個ずつ並べていくことを操作と呼ぶことにする。

白石 180 個, 黒石 181 個を並べて左から石の色に従って点を移動させると, 最終的に－1 に移動する。

一番左の石が黒である場合，－1 に移動した後は，残りの 360 個の碁石は白黒同数であり，すべての碁石を取り除くことになって，0 個の石が残るということになるから題意を満たす。

一番左の石が白である場合，これにより 1 に移動するが，最終的に－1 に移動することになるので，その途中で 0 に移動することになる。

m 回目（$2 \leqq m \leqq 360$）の操作で黒石が選ばれたときに，初めて 0 に移動するものとすると，

ここまでの m 回の操作で並んでいた白石と黒石の個数は同数である。

この後，n 回目（$3 \leqq n \leqq 361$）で黒石を選ぶことで，－1 に移動することがあるが，

この黒石以降のすべての石を取り除くと，残ることになる最初の白石から $n-1$ 個目までの碁石は白石と黒石が同数になる。