［ 東京大学 2001 年前期 文科 $\boxed{3}$ ］

☆

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは， A と B を共に正の方向に 1 動かす。

そうでないときは， A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは， A と B を共に正の方向に 1 動かす。

そうでないときは， B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果，A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち， $a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。

☆

(1)　この試行により，2 点 A, B 間の距離は常に 0 または 1 である。

（ｉ）n 回の試行後， $a=b$ であるとき

$n+1$ 回目の試行の結果，必ず $a \neq b$ になる。

（ⅱ）n 回の試行後， $a=b+1$（すなわち， a が b より大きい）であるとき

$n+1$ 回目に裏が出れば $a=b$ となる。

（ⅲ）n 回の試行後， $b=a+1$（すなわち， b が a より大きい）であるとき

$n+1$ 回目に表が出れば $a=b$ となる。

したがって， n 回の試行後， $a \neq b$ となる場合の数は $2^n - X_n$ 通りであるから

$$X_{n+1} = 2^n - X_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots ①$$

となる。

(2)　①の両辺を 2^{n+1} で割って

$$\frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n}{2^n}+\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right)$$

よって，数列$\left\{\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right\}$は初項$\frac{X_1}{2^1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，公比$-\frac{1}{2}$の等比数列である。

したがって，

$$\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_n}{2^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad X_n=\frac{2^n}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$$