[東京大学 2001 年前期 文科 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が xy 平面上を動く。点 A の時刻 t での座標は $(t^2,\ 0)$ で与えられる。点 B は，最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが，点 C$(0,\ 3)$ に到達した後は，その点から x 軸に平行な直線上を x 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

$t>0$ のとき，三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

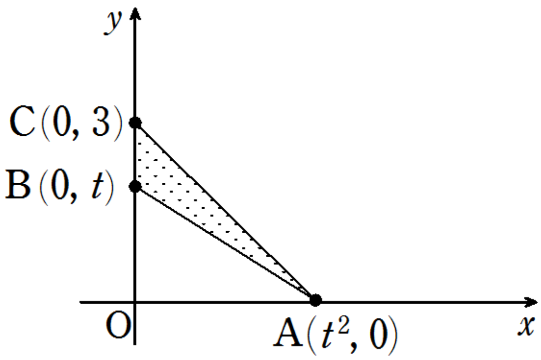
(1) 関数 $S(t)$ $(t>0)$ のグラフの概形を描け。

(2) u を正の実数とするとき，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。

関数 $M(u)$ $(u>0)$ のグラフの概形を描け。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)（i）$0<t\leqq 3$ のとき



B$(0,\ t)$ であるから

$$S(t)=\frac{1}{2}(3-t)t^2=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2$$

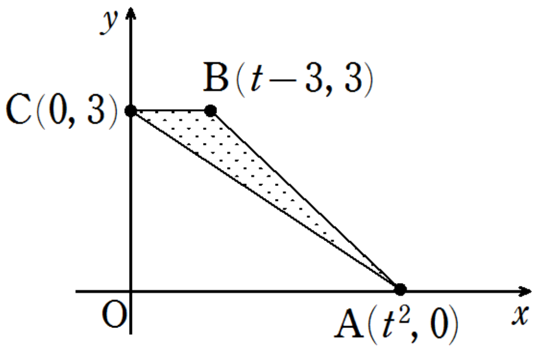
このとき，

$$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2+3t=-\frac{3}{2}t(t-2)$$

であるから，$S(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	2	↘	0

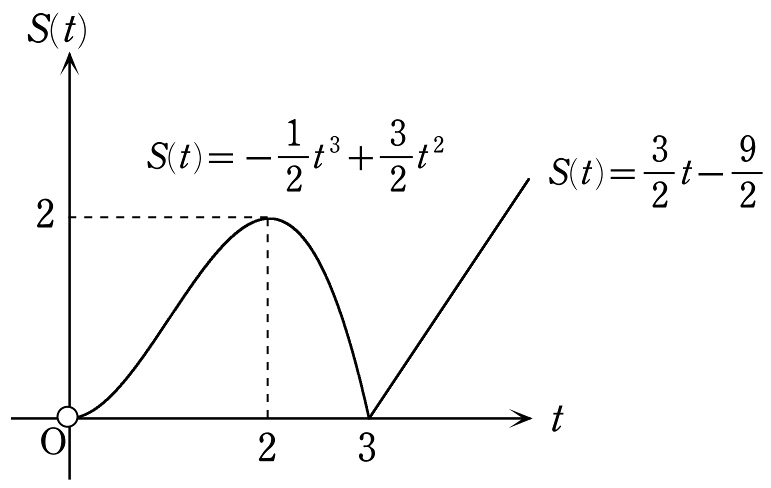
（ii）$t>3$ のとき



B$(t-3,\ 3)$ であるから

$$S(t)=\frac{1}{2}(t-3)\cdot 3=\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}$$

よって，$S(t)$ のグラフは次の図のようになる。



(2)　$t>3$ において $S(t)=2$ となる t を求めると

$\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}=2$　より　$t=\frac{13}{3}$

よって，$0<t \leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ は

$0<u \leqq 2$ のとき　　$M(u)=-\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u^2$

$2 \leqq u \leqq \frac{13}{3}$ のとき　$M(u)=2$

$u \geqq \frac{13}{3}$ のとき　　$M(u)=\frac{3}{2}u-\frac{9}{2}$

となる。$M(u)$ のグラフを描くと次の図のようになる。