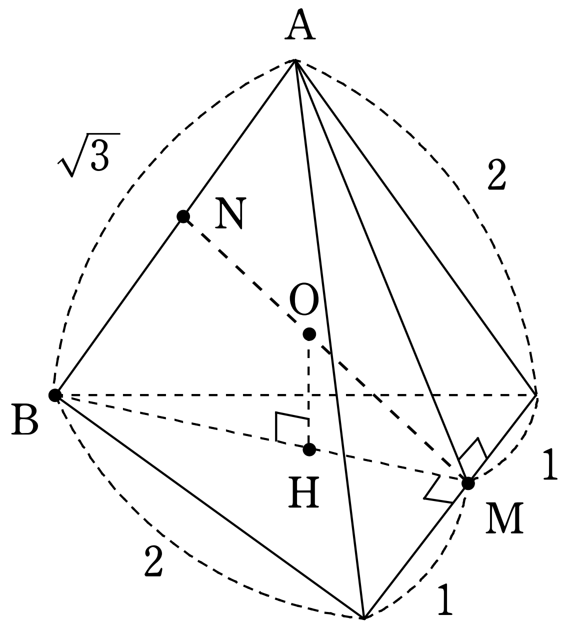
［ 東京大学 2001 年前期 文科 $\boxed{1}$ ］

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{3},\ \mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$$

を満たしている。このとき r の値を求めよ。



球の中心を O とし，O から△BCD に下ろした垂線の足を H とする。

△BCD は正三角形であり，H は△BCD の重心になる。

したがって，辺 CD の中点を M とすると，$\mathrm{BH}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{MH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また，△ABM は一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形であり，辺 AB の中点を N とすると，

3 点 N, O, M は同一直線上にある。

$\angle\mathrm{BMN}=30^\circ$ であるから，$\mathrm{OH}=\mathrm{MH}\tan 30^\circ=\dfrac{1}{3}$

よって，△OHB に着目して

$$r=\mathrm{OB}=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$$