[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{1}$]

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは,

$$\mathrm{AB}=\sqrt{3},\ \mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$$

を満たしている。このとき r の値を求めよ。

[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{2}$]

次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ一つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ。また, そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+y) f(y)dy + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)dy + \sin x + \cos x$$

ただし, $f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする。

[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{3}$]

☆ ☆

実数 $t>1$ に対し，xy 平面上の点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{P}(1,\ 1),\ \mathrm{Q}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$$

を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP, OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき

$$c(t)=\frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと，関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。

☆ ☆

[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{4}$]

複素数平面上の点 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = i \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおく。ただし，i は虚数単位である。

(1) 3 点 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての $b_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{5}$]

容量 1 リットルの m 個のビーカー(ガラス容器)に水が入っている。$m \geqq 4$ で空のビーカーは無い。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。

このとき，水の入っているビーカーが 2 個になるまで，次の (a) から (c) までの操作を，順に繰り返し行う。

(a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。

(b) さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。

(c) 次に，(a) で選んだビーカーの水を (b) で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1) $x < \dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2) $x > \dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。

[東京大学 2001 年前期 理科 $\boxed{6}$]

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは， A と B を共に正の方向に 1 動かす。
そうでないときは， A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは， A と B を共に正の方向に 1 動かす。
そうでないときは， B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 A, B は原点にあるものとし, 上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果， A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち， $a=b$ となる場合の数を X_n とおく。 X_{n+1} と X_n の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。

(3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。