[東京大学 2000 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

k を正整数とし，x を変数とする k 次多項式 $\mathrm{P}_k(x)$ について次の条件

$$(C)\begin{cases}\mathrm{P}_k(x)-\mathrm{P}_{k-1}(x)=x^{k-1}\\ \mathrm{P}_k(0)=0\end{cases}$$

を考える。ただし，$x^0=1$ と定める。このとき，次の問に答えよ。

(1) $k=1,\ 2$ に対し，$\mathrm{P}_k(x)$ を求めよ。

(2) すべての $k \geqq 3$ に対し，条件 (C) を満たす $\mathrm{P}_k(x)$ が存在し，しかもただ一つであることを示せ。

(3) 正整数 k に対し，k 次の多項式 $\mathrm{Q}_k(x)$ を次の条件が成立するように定める。

$$\begin{cases}\mathrm{Q}_k(0)=\mathrm{Q}_k(1)=\cdots=\mathrm{Q}_k(k-1)=0\\ \mathrm{Q}_k(k)=1\end{cases}$$

このとき，k 個の整数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_k$ がそれぞれただ一つ存在して

$$\mathrm{P}_k(x)=\sum_{j=1}^{k}c_j\mathrm{Q}_j(x)$$

と表されることを示せ。

☆ ☆

[東京大学 2000 年後期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

正整数ℓを与える。各正整数nに対して，関数

$$y = x^{\ell}\sin nx,\quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$$

のグラフとx軸で囲まれる図形をC_nとする。

(1) C_nをx軸のまわりに回転させてできる回転体の体積をV_nとするとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty} V_n$$

を求めよ。

(2) C_nをy軸のまわりに回転させてできる回転体の体積をW_nとするとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty} W_n$$

を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 2000 年後期 $\boxed{3}$]

背番号 1 から 5 までを順に付けた 5 人が，何も置かれていないテーブルに向かっている。最初 5 人は各自 3 枚のコインを持っている。それを背番号順に必ず 1 枚または 2 枚テーブルの上に置いてゆく。ただし，手もとに 2 枚以上のコインがあるときに 1 枚だけコインを置く確率を p とし，p は人によらず一定とする。

背番号 5 の人が置き終わったところ（一巡目が終わったところ）で，ふたたび背番号 1 の人から順に手もとに残ったコインをテーブルに置いてゆく。

(1) 一巡目が終わったとき，テーブルの上に 7 枚のコインが置かれている確率 Q を求めよ。また，その Q を最大にする p の値と，そのときの Q の値を求めよ。

(2) 一巡目を終えるとき，背番号 5 の人が，テーブル上に 7 枚目のコインを置く確率 R を求めよ。また，その R を最大にする p の値を求めよ。

(3) 二順目が終わったときのテーブルの上のコインの数の期待値を求めよ。