



$k$  を正整数とし,  $x$  を変数とする  $k$  次多項式  $P_k(x)$  について次の条件



$$(C) \begin{cases} P_k(x) - P_{k-1}(x) = x^{k-1} \\ P_k(0) = 0 \end{cases}$$

を考える。ただし,  $x^0 = 1$  と定める。このとき, 次の問に答えよ。

- (1)  $k = 1, 2$  に対し,  $P_k(x)$  を求めよ。
- (2) すべての  $k \geq 3$  に対し, 条件 (C) を満たす  $P_k(x)$  が存在し, しかもただ一つであることを示せ。
- (3) 正整数  $k$  に対し,  $k$  次の多項式  $Q_k(x)$  を次の条件が成立するように定める。

$$\begin{cases} Q_k(0) = Q_k(1) = \cdots = Q_k(k-1) = 0 \\ Q_k(k) = 1 \end{cases}$$

このとき,  $k$  個の整数  $c_1, c_2, \dots, c_k$  がそれぞれただ一つ存在して

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^k c_j Q_j(x)$$

と表されることを示せ。

