[東京大学 1999 年後期 $\boxed{1}$]

(1) n を正の整数とする。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin nx}{\sin x} & -\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\ x \neq 0 \\ c_n & x = 0 \end{cases}$$

とおくことにより定義される関数 $f_n(x)$ が，連続関数となるように定数 c_n の値を定めよ。

(2) $f_3(x)$ は $\cos x$, $\cos 2x$ 等を用いて表せることを示し，定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_3(x)\,dx$$

の値を求めよ。

(3) 任意の正の整数 n に対して，定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x)\,dx$$

の値を求めよ。

[東京大学 1999 年後期 $\boxed{2}$]

座標平面上の原点を O(0, 0) とする。また x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。

(1) t を正の実数とする。点 P(−1, 0) を通り，傾きが t の直線と単位円 $x^2+y^2=1$ との P 以外の交点を Q(t) とする。Q(t) の座標を求めよ。つぎに，$0<s<t$ を満たす 2 つの実数 s, t に対し，線分 Q(s)Q(t) の長さを求めよ。

(2) $\angle \mathrm{Q}(s)\mathrm{PO}=\alpha$, $\angle \mathrm{Q}(t)\mathrm{PO}=\beta$ とし

$$u=\tan\frac{\alpha}{2},\ v=\tan\frac{\beta}{2}$$

とおく。もし u, v がともに有理数ならば，線分 Q(s)Q(t) の長さもまた有理数となることを示せ。

(3) 任意に与えられた 3 以上の整数 n に対し，次の条件 (C1), (C2), (C3) をすべて満たす n 個の異なる点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ が，座標平面上に存在することを証明せよ。

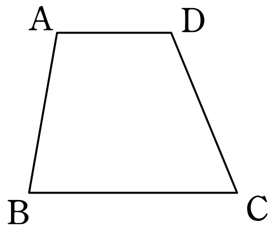
(C1)　$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ はすべて格子点である。

(C2)　$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ のどの異なる 3 点も一直線上にない。

(C3)　$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ のどの異なる 2 点 A_i, A_j に対しても, 線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ の長さは整数である。

[東京大学 1999 年後期 $\boxed{3}$]

座標平面上にある 2 つの四角形 ABCD と A´B´C´D´ が相似であるとは，対応する 4 つの頂点における内角がそれぞれ等しく，かつ対応する辺の長さの比が等しいこととする。このとき



$$\square \mathrm{ABCD} \backsim \square \mathrm{A'B'C'D'}$$

と書く。ただし，四角形 ABCD と書くときには 4 つの頂点 A, B, C, D は図のようにつねに時計と反対回りに並んでいるものとし，また四角形は周および内部を込めて考えるものとする。

四角形 $\mathrm{A_0B_0C_0D_0}$ が与えられたとき，この四角形から出発して，任意の整数 n に対して四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を以下のように帰納的に定める。

(Ⅰ) $n=0$ のときは，与えられた四角形 $\mathrm{A_0B_0C_0D_0}$ とする。

(Ⅱ) $n>0$ のときは，四角形 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}$ まで定まったとして，四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を

$$\mathrm{A}_n=\mathrm{D}_{n-1},\ \mathrm{B}_n=\mathrm{C}_{n-1}\quad \text{かつ}$$
$$\square \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n \backsim \square \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}$$

となる四角形として定める。

(Ⅲ) $n<0$ のときは，$0, -1, \cdots$ と負の向きに進んで，四角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ まで定まったとして，四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を

$$\mathrm{D}_n=\mathrm{A}_{n+1},\ \mathrm{C}_n=\mathrm{B}_{n+1}\quad \text{かつ}$$
$$\square \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n \backsim \square \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$$

となる四角形として定める。

こうして定まった四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を K_n と書くことにする。

さて，座標平面上の 3 点

$$\mathrm{A_0}(2, 1),\ \mathrm{B_0}(8, 4),\ \mathrm{P}(4, 12)$$

を考える。原点を O とし，線分 OP 上に原点以外の 1 点 $\mathrm{C_0}$ をとる。点 $\mathrm{A_0}$ から線分 $\mathrm{B_0C_0}$ に平行にひいた直線と，線分 OP との交点を $\mathrm{D_0}$ とする。このようにして定まる四角形 $\mathrm{A_0B_0C_0D_0}$ から出発して，上記のようにして得られる四角形の系列

$$\cdots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \cdots$$

について考える。

(1) $\angle \mathrm{B_0OP}$ を求めよ。

(2) 線分 OP 上のある点 $\mathrm{C_0}$ をえらび，それにより定まる四角形 $\mathrm{A_0B_0C_0D_0}$ から出発して，四角形の系列 $\cdots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \cdots$ を作ったところ，ある 0 でない整数 n が存在して，$K_n=K_0$ となったという。このとき，点 $\mathrm{C_0}$ の座標を求めよ。また $K_n=K_0$ となる整数 n の値をすべて求めよ。

(3) 線分 OP 上のある点 $\mathrm{C_0}$ をえらび，それにより定まる四角形 $\mathrm{A_0B_0C_0D_0}$ から出発して，四角形の系列 $\cdots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \cdots$ を作ったところ，これら四角形が座標平面から原点を除いた部分を，辺と頂点以外には互い重なることなく，すき間なくおおったという。このような性質をもつ点 $\mathrm{C_0}$ をすべて求め，それらの座標を記せ。またそれらの場合のおのおのについて，$(100, 50)$ が K_n に含まれるような整数 n の値をすべて求めよ。