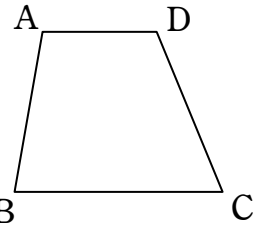




座標平面上にある 2 つの四角形 $ABCD$ と $A'B'C'D'$ が相似であるとは、対応する 4 つの頂点における内角がそれぞれ等しく、かつ対応する辺の長さの比が等しいこととする。このとき

$$ABCD \sim A'B'C'D'$$

と書く。ただし、四角形 $ABCD$ と書くときには 4 つの頂点 A, B, C, D は図のようにつねに時計と反対回りに並んでいるものとし、また四角形は周および内部を込めて考えるものとする。



四角形 $A_0B_0C_0D_0$ が与えられたとき、この四角形から出発して、任意の整数 n に対して四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を以下のように帰納的に定める。

- () $n = 0$ のときは、与えられた四角形 $A_0B_0C_0D_0$ とする。
- () $n > 0$ のときは、四角形 $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$ まで定まったとして、四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を

$$A_n = D_{n-1}, B_n = C_{n-1} \quad \text{かつ}$$

$$A_nB_nC_nD_n \sim A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$$

となる四角形として定める。

- () $n < 0$ のときは、 $0, -1, \dots$ と負の向きに進んで、四角形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ まで定まったとして、四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を

$$D_n = A_{n+1}, C_n = B_{n+1} \quad \text{かつ}$$

$$A_nB_nC_nD_n \sim A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$$

となる四角形として定める。

こうして定まった四角形 $A_nB_nC_nD_n$ を K_n と書くことにする。

さて、座標平面上の 3 点

$$A_0(2, 1), B_0(8, 4), P(4, 12)$$

を考える。原点を O とし、線分 OP 上に原点以外の 1 点 C_0 をとる。点 A_0 から線分 B_0C_0 に平行にひいた直線と線分 OP との交点を D_0 とする。このようにして定まる四角形 $A_0B_0C_0D_0$ から出発して、上記のようにして得られる四角形の系列

$$\dots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \dots$$

について考える。

- (1) $\angle B_0OP$ を求めよ。
- (2) 線分 OP 上のある点 C_0 をえらび、それにより定まる四角形 $A_0B_0C_0D_0$ から出発して、四角形の系列 $\dots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \dots$ を作ったところ、ある 0 でない整数 n が存在して、 $K_n = K_0$ となったという。このとき、点 C_0 の座標を求めよ。また $K_n = K_0$ となる整数 n の値をすべて求めよ。
- (3) 線分 OP 上のある点 C_0 をえらび、それにより定まる四角形 $A_0B_0C_0D_0$ から出発して、四角形の系列 $\dots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \dots$ を作ったところ、これら四角形が座標平面から原点を除いた部分を、辺と頂点以外には互い重なることなく、すき間なくおったという。このような性質をもつ点 C_0 をすべて求め、それらの座標を記せ。またそれらの場合のおのおのについて、 $(100, 50)$ が K_n に含まれるような整数 n の値をすべて求めよ。

