[東京大学 1999 年後期 $\boxed{2}$]

座標平面上の原点を O(0, 0) とする。また x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。

(1) t を正の実数とする。点 P(−1, 0) を通り，傾きが t の直線と単位円 $x^2+y^2=1$ との P 以外の交点を Q(t) とする。Q(t) の座標を求めよ。つぎに，$0<s<t$ を満たす 2 つの実数 s, t に対し，線分 Q(s)Q(t) の長さを求めよ。

(2) $\angle \mathrm{Q}(s)\mathrm{PO}=\alpha$, $\angle \mathrm{Q}(t)\mathrm{PO}=\beta$ とし

$$u=\tan\frac{\alpha}{2},\ v=\tan\frac{\beta}{2}$$

とおく。もし u, v がともに有理数ならば，線分 Q(s)Q(t) の長さもまた有理数となることを示せ。

(3) 任意に与えられた 3 以上の整数 n に対し，次の条件 (C1), (C2), (C3) をすべて満たす n 個の異なる点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ が，座標平面上に存在することを証明せよ。

(C1)　$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ はすべて格子点である。

(C2)　$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ のどの異なる 3 点も一直線上にない。

(C3)　$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ のどの異なる 2 点 A_i, A_j に対しても，線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ の長さは整数である。