[東京大学 1999 年前期 理科 $\boxed{1}$]

☆ ☆

(1) 一般角θに対して$\sin\theta$, $\cos\theta$の定義を述べよ。

(2) (1)で述べた定義にもとづき，一般角α, βに対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

☆ ☆

[東京大学 1999 年前期 理科 $\boxed{2}$]

複素数 $z_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ を $z_1=1,\ z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$ によって定める。ただし i は虚数単位であり，また，複素数 $z=x+iy$ （$x,\ y$ は実数）に対して，$|z|$ を

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

で定義する。

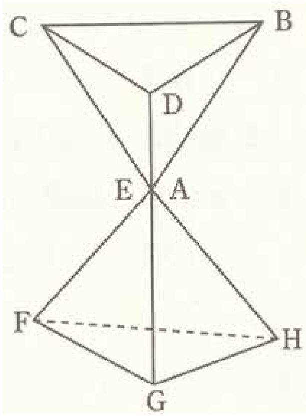
(1) すべての自然数 n について $\dfrac{3\times 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$ が成り立つことを示せ。

(2) 実数 $r>0$ に対して，$|z_n|\leqq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく。

このとき，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}$ を求めよ。

［ 東京大学 1999 年前期 理科 $\boxed{3}$ ］

p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする。



(1) 四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 p で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2) (1)で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。

☆ ☆

xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって以下の 2 条件を満たしているものとする。

(a) A, B は原点からの距離が 1 以下の領域に含まれる。

(b) A, B は一点 P のみを共有し, P はそれぞれの円周上にある。

このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし, 円板とは円の内部と円周をあわせたものを意味する。

☆ ☆

[東京大学 1999 年前期 理科 $\boxed{5}$]

(1) k を自然数とする。m を $m=2^k$ とおくとき，$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ。

(2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件：$0 \leqq n \leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である。

[東京大学 1999 年前期 理科 $\boxed{6}$]

$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx > 8$ であることを示せ。

ただし，$\pi = 3.14\cdots$ は円周率，$e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。